

OPERATORPRODUKTENTWICKLUNG UND  
STRUKTUR DER WIGHTMANFUNKTIONEN

KLAUS BAUMANN

1974



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

Operatorproduktentwicklung und Struktur  
der Wightmanfunktionen

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität  
München

vorgelegt von  
Klaus Baumann  
München

1974



1. Berichterstatter: Priv. Doz. Dr. S. Schlieder

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Oktober 1974

## Zusammenfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit der Definition des Produktes zweier Feldoperatoren und der Struktur der Wightmanfunktionen. Die Betrachtungen beschränken sich auf eine skalare, relativistische Quantenfeldtheorie, die den Wightman Axiomen genügt.

Ausgehend von den Eigenschaften der Jostzustände  $A(z_1) \dots A(z_n) \Omega$  (zur Bezeichnungsweise siehe Abschnitt I.1) wird eine Zerlegung des Operatorproduktes  $A(z)A(z+\xi)$  definiert -  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi) B_k(z, \xi)$ . Die Operatoren  $B_k(z, \xi)$  haben den Raum  $J_z$ , einen dichten Teilraum der Menge aller Jostzustände, zum Definitionsbereich. Angewandt auf Zustände  $\Phi \in J_z$  ist der Vektor  $B_k(z, \xi)\Phi$  analytisch für  $\xi = 0$ . Die Funktionen  $u_k(\xi)$  sind Träger der verschiedenen Singularitäten für  $\xi = 0$ . Diese angenommene Struktur des Operatorproduktes findet ihren Niederschlag in der Struktur der Wightmanfunktionen  $\mathcal{W}_n(z_1, \dots, z_n) = \langle \Omega, A(z_1) \dots A(z_n) \Omega \rangle$ , wie man durch Einsetzen von  $A(z_i)A(z_{i+1}) = \sum_{k=1}^l u_k(z_{i+1} - z_i) B_k(z_i, z_{i+1} - z_i)$  in die n-Punkt-Funktion erkennt. Der Vorteil dieses Zuganges gegenüber anderen Methoden ist der, daß man sich der Theorie der analytischen Funktionen bedienen kann und nicht auf den Distributionsbegriff zurückgreifen muß. Das Ergebnis des ersten Kapitels ist, daß die wesentlichen Aussagen über die Zerlegung des Operatorproduktes  $A(z)A(z+\xi)$  - wie etwa Anzahl der Terme oder Stärke der Singularitäten - bereits durch die Zerlegung der Vierpunktfunktion bestimmt sind.

Gestützt auf dieses Resultat wird in den Kapiteln II und III der umgekehrte Weg beschritten. Es wird versucht, aus Annahmen über die Struktur der Vierpunktfunktion auf die Existenz einer Operatorproduktentwicklung zu schließen.

Zunächst wird eine spezielle Klasse von Theorien betrachtet. Zur Vierpunktfunktion  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  soll es eine regularisierende Funktion  $r(\xi_3)$  geben, so daß  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) r(\xi_3)$  für feste  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{V}^+$  analytisch zu  $\xi_3 = 0$  fortgesetzt werden kann. Unter dieser Voraussetzung wird bewiesen, daß das Operatorprodukt  $A(z)A(z+\xi)r(\xi)$  für  $z \in \mathcal{V}^+$  auf dem Raum  $J_z$  definiert und der Vektor  $A(z)A(z+\xi)r(\xi)\Phi$  mit  $\Phi \in J_z$  analytisch für  $\xi = 0$  ist. Es stellt sich heraus, daß  $r(\xi)$  im wesentlichen das Inverse zur Zweipunktfunktion  $W_2(\xi)$  ist. Überraschenderweise ist die hier aufgeführte Voraussetzung sogar hinreichend für die Existenz des Operatorproduktes  $A(z_1) \dots A(z_n) \prod_{i < j} r(z_j - z_i)$ , wobei alle Argumente zusammenfallen dürfen. Beispiele von Feldern für die eine regularisierende Funktion  $r(\xi)$  existiert, sind das freie Feld zur Masse Null und die daraus abgeleiteten Wickpolynome.

Eine vernünftige Verallgemeinerung ist die Annahme, daß die Vierpunktfunktion  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  eine endliche Zerlegung der Form  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_3) G_{4,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  besitzt, wobei die Funktionen  $u_k(\xi_3)$  die möglichen, verschiedenen Singularitäten charakterisieren und die Funktionen  $G_{4,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  analytisch im Punkt  $\xi_3 = 0$  sind. Im Gegensatz zum vorhergehenden Fall folgt daraus nicht unmittelbar die Existenz eines Operatorproduktes. Vielmehr müssen weitere Annahmen gemacht werden: Die Funktionen

$(\sqrt{\xi^2})^m u_k(\xi)$  sollen für  $k = 1, \dots, l$  und alle ganzen Zahlen  $m$  nach ihrer Singularität für  $\xi = 0$  geordnet werden können - eine derartige Voraussetzung erscheint durchaus plausibel. Einschneidender ist jedoch die Forderung, daß die geraden Wightmanfunktionen  $W_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_{2n-1})$  eine Zerlegung bezüglich des Argumentes  $\xi_{n+1}$  besitzen, wenngleich diese Zerlegungen von recht allgemeiner Natur sein können. Unter diesen Voraussetzungen wird eine endliche Zerlegung des Operatorproduktes  $A(z)A(z+\xi)$  mit den in Kapitel I aufgeführten Eigenschaften bewiesen. Beispiele für diese allgemeinere Klasse sind alle bekannten Wightmantheorien.

| <u>Inhaltsverzeichnis:</u>                                                                             | Seite |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Einleitung:                                                                                            | 1     |
| Kapitel I: Zerlegung des Operatorproduktes $A(z)A(z+\xi)$<br>nach singulären Distributionen $u_j(\xi)$ | 4     |
| I.1 Bezeichnungen                                                                                      | 5     |
| I.2 Zerlegung des Operatorproduktes $A(z)A(z+\xi)$ ;<br>Beispiele                                      | 7     |
| I.3 Folgerungen für Jostzustände und Wightmanfunktionen                                                | 9     |
| I.4 Die spezielle Rolle der Vierpunktfunktion                                                          | 12    |
| I.5 Eindeutigkeit der Zerlegung von $A(z)A(z+\xi)$                                                     | 16    |
| I.6 Stärkste Singularität und Zweipunktfunktion                                                        | 20    |
| Anhang                                                                                                 | 24    |
| Kapitel II: Operatorproduktentwicklungen für eine spezielle<br>Klasse von Wightmantheorien             | 26    |
| II.1 Annahmen an die Vierpunktfunktion und Beispiele                                                   | 26    |
| II.2 Holomorphie von $W_{n+1}(\xi)r(\xi_j)$                                                            | 31    |
| II.3 Zusammenhang zwischen der regularisierenden Funktion<br>$r(\xi)$ und der Zweipunktfunktion        | 34    |
| II.4 Darstellung der n-Punkt-Funktionen                                                                | 36    |
| II.5 Operatorprodukte                                                                                  | 42    |
| II.6 Operatorproduktentwicklungen und zusammengesetzte<br>Operatoren                                   | 51    |
| Anhang                                                                                                 | 57    |
| Kapitel III: Verallgemeinerung der Ergebnisse                                                          | 63    |
| III.1 Problemstellung                                                                                  | 63    |
| III.2 Zerlegung des Zustandes $\phi_2(z, z+\xi)$                                                       | 65    |
| III.3 Zerlegungen der Wightmanfunktion $W_{n+1}(\xi)$                                                  | 71    |
| III.4 Eine Zerlegung des Operatorproduktes $A(z)A(z+\xi)$                                              | 79    |
| Anhang                                                                                                 | 85    |
| Literaturverzeichnis                                                                                   | 89    |

Herrn Dr. S. Schlieder danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und viele hilfreiche Ratschläge. Für nützliche Diskussionen danke ich H. Kühn, Dr. E. Seiler und anderen Mitgliedern des Max-Planck-Instituts. Der Max-Planck-Gesellschaft bin ich für ein Stipendium zum Dank verpflichtet.

## Einleitung

Will man in einer Feldtheorie eine lokale Wechselwirkung einführen, so benötigt man Produkte der Feldgrößen am gleichen Ort. In einer relativistischen Quantenfeldtheorie sind die zu Grunde liegenden Felder operatorwertige Distributionen [1]. Dieser distributive Charakter der Feldoperatoren bereitet nun Schwierigkeiten bei der Definition von Produkten der Feldoperatoren im gleichen Raum-Zeit-Punkt.

Im Falle des freien Feldes  $\varphi(x)$  ist jedoch wohlbekannt, wie man  $:\varphi^{\tilde{n}}(x):$  zu definieren hat - nämlich in Form des Wickproduktes [2], durch Abzug geeigneter Produkte von Zweipunktfunktionen. Die so erhaltenen Felder sind wieder operatorwertige Distributionen, die relativ lokal zu  $\varphi(x)$  sind [1] - d.h.

$$[:\varphi^{\tilde{n}}(x), \varphi(y):] = 0 \quad \text{falls der Abstand } y-x \text{ raumartig.}$$

In den letzten Jahren wurden große Anstrengungen unternommen, um Produkte von Feldoperatoren im Falle wechselwirkender Felder zu erklären. Neben vielen anderen seien hier besonders Wilson [3] und Zimmermann [4] erwähnt. Als Ansatz für ein reelles skalares Feld  $A(x)$  nehmen sie Entwicklung

$$A(x+\xi_1)A(x+\xi_2)\cdots A(x+\xi_n) = \sum_{j=1}^n \mathcal{I}_j(\xi_1, \dots, \xi_n) B_j(x) + R_n(x; \xi_1, \dots, \xi_n)$$

Die  $B_j(x)$  sind Feldoperatoren, die relativ lokal zu  $A(x)$  sind. Die Funktionen  $\mathcal{I}_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$  werden im allgemeinen singular für  $\xi_i \rightarrow 0, i = 1, \dots, n$ , und sind nach dem Singularitätsgrad so geordnet, daß

$$\lim_{\xi_1, \dots, \xi_n \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}_{i+1}(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\mathcal{I}_i(\xi_1, \dots, \xi_n)} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Von dem operatorwertigen Restglied  $R_n(x; \xi_1, \dots, \xi_n)$  wird

$$\lim_{\xi_1, \dots, \xi_n \rightarrow 0} \frac{R_n(x; \xi_1, \dots, \xi_n)}{\mathcal{I}_n(\xi_1, \dots, \xi_n)} = 0 \quad \text{angenommen.}$$

Die Operatoren  $B_j(x)$  sind nun die möglichen Kandidaten für  $:A^{\tilde{n}}(x):$ .

Die ersten Ansätze mit derartigen Operatorproduktdefinitionen gehen auf Valatin [5] zurück. Zimmermann [6] und Brandt [7] haben die Gültigkeit solcher Entwicklungen für gewisse Beispiele im Rahmen der Störungstheorie bewiesen. Wilson und Zimmermann [4] gaben Bedingungen an, unter denen die Entwicklung gültig ist. Zimmermann [8], Otterson [9] und Dell'Antonio [10] haben die Eigenschaften der singulären Funktionen  $\mathcal{I}_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$  und der lokalen Operatoren  $B_j(x)$  näher untersucht. Für das exakt lösbare Thirring-Modell wurde die obige Entwicklung von Lowenstein [11] bewiesen.

Die hier vorliegende Arbeit wird sich ebenfalls mit der Definition von Operatorprodukten befassen, aber - im Unterschied zu den oben aufgeführten Arbeiten - im axiomatischen Rahmen einer Wightmanfeldtheorie.

Um die Aufgabe nicht noch weiter zu komplizieren beschränken sich die Betrachtungen auf ein reelles skalares Feld  $A(x)$  und haben die Definition von  $A:^2(x)$  zum Ziel.

In Kapitel I wird eine Entwicklung des Produktes  $A(z)A(z+\xi)$  in gewissen komplexen Punkten vorgeschlagen. Diese Punkte haben den Vorzug, daß  $A(z)$  einen Operator darstellt und angewandt auf Zustände des Definitionsbereiches analytische Vektoren ergibt. Man kann sich daher der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher bedienen.

Als Ausgangspunkt des ersten Kapitels wird eine endliche Zerlegung des Operatorproduktes

$$A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi) B_k(z, \xi) \quad \text{angenommen.}$$

Die Operatoren  $B_j(z, \xi)$  sollen auf dem Definitionsbereich analytisch für  $\xi = 0$  sein. Die Singularitäten stecken nur noch in den Funktionen  $u_k(\xi)$ . (siehe Abschnitt I.2). Die Feldtheorie soll hier hauptsächlich durch die analytischen Wightmanfunktionen  $\mathcal{W}_n(\underline{z}) = (\Omega, A(z_1) \dots A(z_n)\Omega)$  charakterisiert werden. Die Zerlegung des Produktes zweier Feldoperatoren induziert nun eine Zerlegung aller Wightmanfunktionen

$$(\Omega, A(z_1) \dots A(z_n)\Omega) = \sum_{k=1}^l u_k(z_{j+1} - z_j) (\Omega, A(z_1) \dots B_k(z_j, z_{j+1} - z_j) \dots A(z_n)\Omega)$$

Notwendigerweise sind also alle Singularitäten, die ja durch  $u_k(z_{j+1} - z_j)$  repräsentiert werden, unabhängig von  $n$ , bei festem  $n$  unabhängig von  $j$  (die Stelle, an der die Zerlegung eingeschoben wird) und bei festem  $n$  und  $j$  unabhängig von den anderen Argumenten. Dabei muß man natürlich berücksichtigen, daß die Matrixelemente  $(\Omega, A(z_1) \dots B_k(z_j, z_{j+1} - z_j) \dots A(z_n)\Omega)$  Nullstellen aufweisen oder identisch verschwinden können. (Abschnitt I.3). Danach wird bewiesen, daß die gesamte Information über die Singularitäten von  $A(z)A(z+\xi)$  in der Vierpunktfunktion und deren Zerlegung enthalten ist. (Abschnitt I.4). Die Zerlegung des Operatorproduktes ist im wesentlichen eindeutig, wenn man annimmt, daß die  $u_1(\xi), \dots, u_l(\xi)$  Träger verschiedener Singularitäten sind. (Abschnitt I.5). Die stärkste Singularität ist bereits durch die Zweipunktfunktion gegeben. (Abschnitt I.6).

Auf Grund dieser Resultate kann man hoffen, durch geeignete Bedingungen an die Vierpunktfunktion - die ja offenbar eine zentrale Rolle für die Definition von  $A(z)A(z+\xi)$  spielt - die Existenz einer Zerlegung von  $A(z)A(z+\xi)$  zu erzwingen. Dieser Weg wird in den Kapiteln II und III beschritten.

Im II. Kapitel wird die Existenz einer regularisierenden Funktion  $\tau(\xi)$  vorausgesetzt, so daß  $W_4(\xi)r(\xi_3) = F_4(\xi)$  analytisch für  $\xi_3 = 0$  ist. In der Sprache des I. Kapitels bedeutet dies, daß die Vierpunktfunktion eine Zerlegung  $W_4(\xi) = \frac{1}{r(\xi_3)} \Gamma_4(\xi)$  besitzt, die nur aus einem Term besteht. (Abschnitt II.1). Daraus folgt die Analytizität von  $W_{n+1}(\xi) + (\xi_j)$  für  $\xi_j = 0$  wie von Seidler und Seiler [12] gezeigt wurde. (Abschnitt II.2).  $r(\xi)$  ist im wesentlichen gleich der inversen Zweipunktfunktion  $W_2(\xi)$ . (Abschnitt II.3). Überraschenderweise stellt sich heraus, daß die Annahmen des II. Kapitels sogar hinreichen für die Analytizität von  $W_{n+1}(\xi) \prod_{1 \leq i, j \leq n} r(\xi_i + \dots + \xi_j)$ , falls alle Argumente  $\xi_j = 0$  sind. (Abschnitt II.4). Die so in Termen der Wightmanfunktionen erhaltenen Ergebnisse werden anschließend auf die zu Grunde liegenden Feldoperatoren zurücktransformiert und führen zur Definition von zusammengesetzten lokalen Feldoperatoren für beliebige hohe Potenzen. (Abschnitte II.5 und II.6).

Es ist klar, daß diese Überlegungen der Verallgemeinerung bedürfen. Daher wird in Kapitel III von einer endlichen Zerlegung der Vierpunktfunktion

$$W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^K u_k(\xi_3) G_{4,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

ausgegangen. In dieser Allgemeinheit treten - nicht unerwartet - einige Schwierigkeiten auf. (Abschnitt III.1). Unter zusätzlichen plausiblen Annahmen an alle Wightmanfunktionen wird eine entsprechende Zerlegung aller N-Punkt-Funktionen bewiesen. (Abschnitte II.2 und III.3). Dies führt schließlich zu einer Zerlegung des Operatorproduktes  $A(z)A(z+\xi)$ . (Abschnitt III.4).

Die Überlegungen dieser Arbeit können aber auch unter einem anderen Aspekt gesehen werden: Wie spiegelt sich eine über den allgemeinen axiomatischen Rahmen hinausgehende Kenntnis der Struktur der Vierpunktfunktion in den anderen N-Punkt-Funktionen und damit letztlich im Produkt der Feldoperatoren wider. Diese Betrachtungsweise ermöglicht vielleicht eine Klassifikation der Wightmanfelder nach der Struktur der Singularitäten. Zwar umfaßt die vorliegende Arbeit nicht alle möglichen Wightmantheorien, doch ist sie ein erster Schritt für eine derartige Analyse und führt so zu einem besseren Verständnis der Struktur relativistischer Quantenfelder.

# I. Kapitel: Zerlegung des Operatorproduktes $A(z)A(z+\xi)$ nach singulären Distributionen $u_j(\xi)$

Um die Schwierigkeiten zu umgehen, die mit der Klassifikation von Distributionen nach ihren Singularitäten im Ursprung zusammenhängen, und um die Hilfsmittel der Funktionentheorie zur Hand zu haben, wird hier eine andere Art der Operatorproduktentwicklung vorgeschlagen. Zu Grunde liegt folgende Idee:

Sei  $A(x)$  ein skalares Feld und  $\phi(z_1, \dots, z_m) = A(z_1) \dots A(z_m) \Omega$  ein Jostzustand - d.h.  $z_1, z_2 - z_1, \dots, z_m - z_{m-1} \in \tau^+$ . Für  $z \in \tau^+$  definiert  $A(z) \phi(z_1, \dots, z_m)$  einen in  $z$  holomorphen Vektor im Hilbertraum, falls  $z \in \tau^+$  und zugleich  $z_1 - z \in \tau^+$ . (Zur Bezeichnungsweise siehe Abschnitt I.1). Entsprechend gilt für das Produkt zweier Feldoperatoren angewandt auf  $\phi(z_1, \dots, z_m)$ :  $A(z)A(z+\xi) \phi(z_1, \dots, z_m)$  ist holomorpher Vektor in  $(z, \xi)$ , falls  $(z, \xi) \in \tau_2^+$  und  $z_1 - z - \xi \in \tau^+$ . Die lineare Hülle dieser Zustände  $\phi_m(z_1, \dots, z_m)$ ,  $m=0, 1, \dots$  ( $\phi_0 = \Omega$  das Vakuum) mit  $z_1 - z \in \tau^+$  bilden den dichten Teilraum  $J_z$  von  $\mathcal{H}$ . Das Produkt  $A(z)A(z+\xi)$  hat daher den Raum  $J_z$  als Definitionsbereich. Dies legt folgenden Ansatz für eine Operatorproduktentwicklung nahe:

$$A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\xi) B_k(z, \xi)$$

Die  $u_1, \dots, u_l$  sind lorentzinvariante meromorphe Funktionen in  $\tau^+$  und tragen die Singularitäten in  $\xi$ . Die Operatoren  $B_k(z, \xi)$  besitzen als Definitionsbereich den Raum  $J_z$ . Für  $\phi(z_1, \dots, z_m) \in J_z$  ist der Zustand  $B_k(z, \xi) \phi(z_1, \dots, z_m)$  holomorph in  $\xi$  falls  $\xi \in \tau^+$ ,  $z_1 - z - \xi \in \tau^+$  und ferner falls  $\xi \in U_r(0)$ . Dabei ist  $U_r(0)$  eine reelle Umgebung von  $0 \in \mathbb{C}^4$ .

Das wesentliche an diesem Vorschlag ist, daß die Singularitäten des Operatorproduktes von den Funktionen  $u_k(\xi)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) von denen der meromorphen Feldwerte, getrennt werden, wofür dann die zugehörigen Operatoren  $B_k(z, \xi)$  angewandt auf Zustände  $\phi \in J_z$  holomorph für  $\xi = 0$  sind.

In Abschnitt I.1 werden die notwendigen Definitionen und Bezeichnungen eingeführt. Danach wird die Zerlegung  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  eingeführt und durch Beispiele erläutert. Im dritten Abschnitt werden die Folgerungen für die Jostzustände und die Wightmanfunktionen angegeben. Danach wird auf die besondere Rolle der Vierpunktfunktion eingegangen. Abschnitt I.5 beantwortet die Frage nach der Eindeutigkeit der Zerlegung. Abschließend wird unter zusätzlichen Annahmen an die  $u_1(\xi)$  bis  $u_l(\xi)$  der Zusammenhang zwischen stärkster Singularität und Zweipunktfunktion aufgezeigt.

## I.1 Bezeichnungen

Bevor die eigentliche Arbeit in Angriff genommen wird, seien kurz einige Bezeichnungen eingeführt und die notwendigen Definitionen getroffen [13, 14].

### a) Vierervektoren, Vorwärts- und Rückwärtskegel

$\underline{z} := (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{4(n+1)}$  bezeichnet ein  $(n+1)$ -Tupel von komplexen Vierervektoren. Real- und Imaginärteil wird mit  $\underline{x}$  und  $\underline{y}$  bezeichnet - also  $\underline{z} = \underline{x} + i \underline{y}$  mit  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^{4(n+1)}$

$\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^{4n}$  mit  $\xi_i = \xi_i^0 + i \eta_i$ ,  $\xi_i^0, \eta_i \in \mathbb{R}^{4n}$  bedeutet ein  $n$ -Tupel von Vierervektoren, dabei ist  $\xi_i = z_i - z_{i-1}$  für  $i = 1, \dots, n$ .

Das  $n$ -fache Produkt des Vorwärts- bzw. Rückwärtskegels ist

$V_n^{\pm} := \{ \eta_i \mid \eta_i \in \mathbb{R}^{4n} \text{ mit } \eta_i^0 > 0 \text{ und } \eta_i^0 \geq 0, i = 1, \dots, n \}$ , wobei die Metrik  $(+, -, -, -)$  ist - also  $\eta_i^2 = (\eta_i^0)^2 - (\vec{\eta}_i)^2$ .

### b) Röhren und Lorentztransformationen

Die zu  $V_n^{\pm}$  gehörenden Vorwärts- und Rückwärtsröhren sind

$$\tau_n^{\pm} := \{ \underline{\xi} = \underline{\xi}^0 + i \underline{\eta} \mid \underline{\xi}^0 \in \mathbb{R}^{4n}, \underline{\eta} \in V_n^{\pm} \}$$

Die Gruppe der reellen Lorentztransformationen wird mit  $\mathcal{L}$  bezeichnet, sie zerfällt in die vier Zusammenhangskomponenten [14]  $\mathcal{L}_+^{\uparrow}$ ,  $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$ ,  $\mathcal{L}_-^{\uparrow}$  und  $\mathcal{L}_-^{\downarrow}$ .

$\mathcal{L}(\mathbb{C})$  ist die Gruppe der komplexen Lorentztransformationen, ihre Komponenten sind  $\mathcal{L}_+(\mathbb{C})$  und  $\mathcal{L}_-(\mathbb{C})$ .

Damit definiert man als erweiterte Röhre

$$\tau_n' := \{ \underline{\xi} \mid \text{Es gibt } \Lambda \in \mathcal{L}_+(\mathbb{C}) \text{ mit } \Lambda \underline{\xi} \in \tau_n^+ \}$$

$\mathcal{S}_{n+1}^*$  ist die Gruppe der Permutationen von  $\{0, 1, \dots, n\}$ . Für  $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}^*$  sei definiert  $\underline{z}_{\pi} := (z_{\pi(0)}, \dots, z_{\pi(n)})$ . Daraus ergibt sich

$$\underline{\xi}_{\pi} := (z_{\pi(1)} - z_{\pi(0)}, \dots, z_{\pi(n)} - z_{\pi(n-1)})$$

Die von  $\pi \in \mathcal{S}_{n+1}^*$  erzeugten permutierten Röhren sind:

$$\tau_{n,\pi}^{\pm} := \{ \underline{\xi}_{\pi} \mid \underline{\xi} \in \tau_n^{\pm} \} \quad \begin{array}{l} \text{Vorwärts-} \\ \text{permutierte} \quad \text{Rückwärts-} \end{array} \quad \text{Röhre}$$

$$\tau_{n,\pi}' := \{ \underline{\xi}_{\pi} \mid \underline{\xi} \in \tau_n' \} \quad \text{permutierte erweiterte Röhre}$$

c) Das skalare Feld  $A(x)$  und die Wightmanfunktionen

$A(x)$  bezeichne ein relativistisches, skalares Feld, das den Wightmanaxiomen genügt. Der zu Grunde liegende Hilbertraum wird mit  $\mathcal{H}$  bezeichnet. Die Elemente sind  $\psi$ ,  $\phi$  und  $(\psi, \phi)$  ist das Skalarprodukt.  $\Omega \in \mathcal{H}$  bedeutet den Vakuumzustand. Die Jostzustände  $\phi_0 := \Omega$  und

$$\begin{aligned}\phi_1(z) &:= A(z)\Omega := \int e^{i p z} \tilde{A}(p) \Omega dp \quad \text{für } z \in \tau^+, \dots, \\ \phi_{n+1}(z) &:= A(z_0) \dots A(z_n) \Omega := \int e^{i \sum_{k=0}^n p_k z_k} \tilde{A}(p_0) \dots \tilde{A}(p_n) \Omega dp_0 \dots dp_n\end{aligned}$$

sind vektorwertige, holomorphe Funktionen in  $\underline{z}$ , falls  $z_0 \in \tau^+$ ,  $z_1 - z_2, \dots, z_n - z_{n-1} \in \tau^+$  [13]. Eine äquivalente Methode zur Beschreibung der Feldtheorie bilden die Wightmanfunktionen

$$W_{n+1}(\underline{z}) = (\Omega, \phi_{n+1}(z)) = (\Omega, A(z_0) A(z_1) \dots A(z_n) \Omega)$$

Wegen der Invarianz von  $W_{n+1}(\underline{z})$  unter Translationen gilt

$$W_{n+1}(\underline{z}) = W_{n+1}(\underline{\xi}) \quad \text{mit} \quad \xi_i = z_i - z_{i-1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

$W_{n+1}(\underline{\xi})$  ist eine holomorphe Funktion für  $\underline{\xi} \in \tau_n^+$ . Der Randwert  $W_{n+1}(\underline{\xi} + i0)$  ist eine temperierte Distribution über dem Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ .

Als weiterer Testfunktionsraum tritt für  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{4n}$  der Raum

$$\mathcal{S}(\mathcal{U}) := \{f(\underline{\xi}) \mid f \text{ komplexwertig, } f \in C^\infty(\mathbb{R}^{4n}), \overline{\text{supp}} f \subset \mathcal{U} \text{ kompakt}\}$$

auf. Der dazu duale Raum wird mit  $\mathcal{S}'(\mathcal{U})$  bezeichnet.

d) Dichte Teilräume des Hilbertraumes  $\mathcal{H}$

Vom Feldoperator  $A(f)$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  wird gefordert, daß alle Vektoren der Form  $A(f_1) \dots A(f_n) \Omega$ ,  $f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$  im Definitionsbereich liegen. Dies gibt Anlaß zu den Teilräumen

$$\mathcal{D}_0 := \{\alpha \Omega \mid \alpha \in \mathbb{C}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_n = L(\{A(f_1) \dots A(f_n) \Omega \mid f_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)\}), \quad n = 1, 2, \dots$$

dabei bedeutet  $L(M)$  die lineare Hülle über  $\mathbb{C}$  von der Menge  $M$ .

$\mathcal{D} = L(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n)$  ist der postulierte Definitionsbereich von  $A(f)$  und liegt nach Annahme dicht in  $\mathcal{H}$ . Klarerweise umfaßt  $\mathcal{D}$  die Räume  $\mathcal{D}_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Räume  $\mathcal{D}_n$  wird im Anhang A bewiesen.

Andere Teilräume ergeben sich aus den Jostzuständen.

So definiert  $J_0 := \{ \alpha \in \mathbb{C} \}$  und  $J_m := L(\{ \phi_m(z) \mid z_1, z_2, \dots, z_m \in \tau^+ \})$

für  $n = 1, 2, \dots$  lineare Teilräume in  $\mathcal{H}$ . Fordert man zusätzlich noch

$z_1, z \in \tau^+$ , so erhält man die Räume  $J_{n,z}$  und es gilt für  $z, z' \in \tau^+$

$$J_m = J_{m,0} \supset J_{m,z} \supset J_{m,z'}$$

Die linearen Räume  $J = L(\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n)$  und  $J_z = L(\bigcup_{n=0}^{\infty} J_{n,z})$ ,  $z \in \tau^+$

liegen dicht in  $\mathcal{H}$  und es gilt  $J_z \subset J \subset \mathcal{H}$ . Es sei bemerkt, daß  $J_{n,z}$  und  $J_z$  nur vom Imaginärteil  $y = \text{Im } z$  abhängen und durch die Translation um  $z$  aus  $J_n$  und  $J$  hervorgehen - also  $J_{n,z} = e^{iPz} J_n$  und  $J_z = e^{iPz} J$ . Im folgenden werden hauptsächlich die Räume  $J_n$  und  $J$  beziehungsweise  $J_{n,z}$  und  $J_z$  benötigt.

## 1.2 Zerlegung des Operatorproduktes $A(z) A(z+\xi)$ ;

### Beispiele

In diesem Abschnitt soll zuerst definiert werden, was unter einer Zerlegung von  $A(z) A(z+\xi)$  verstanden wird. Anschließend an einige Bemerkungen werden zwei Beispiele zur Motivation und Illustration aufgeführt.

a) Definition: Das Operatorprodukt  $A(z) A(z+\xi)$  besitzt eine Zerlegung auf dem Raum  $J_z$ , wenn gilt:

$$A(z) A(z+\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi) B_k(z, \xi) \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

(Z 1)  $u_1, \dots, u_l$  sind lorentzinvariante, meromorphe Funktionen in  $\tau^+$  mit der Symmetrie  $u_k(-\xi) = u_k(\xi)$

(Z 2) Die Vektoren  $\phi_0 = \Omega$  und  $\phi_m(z_1, \dots, z_m) \in J_z$ ,  $m = 1, 2, \dots$  liegen im Definitionsbereich der Operatoren  $B_1(z, \xi), \dots, B_l(z, \xi)$  falls  $\xi \in \tau^+$  und  $z_1, z_2, \dots, z_m \in \tau^+$ .

Die Vektoren  $B_k(z, \xi) \phi_m(z)$  sind holomorph in  $(z, \xi) \in \tau_z^+$  falls  $z_1, z_2, \dots, z_m \in \tau^+$ . Darüberhinaus besitzen sie holomorphe Fortsetzungen zu den Punkten  $\xi \in U_r(0)$ , wobei  $U_r(0)$  eine reelle Umgebung von  $0 \in \mathbb{C}^4$  bedeutet.

(Z 3) Lineare Unabhängigkeit der Funktionen  $u_1(\xi), \dots, u_l(\xi)$  und der Operatoren  $B_1(z, \xi), \dots, B_l(z, \xi)$

(a) Aus  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi) u_k(\xi) = 0$ , wobei  $f_1(\xi), \dots, f_l(\xi)$  meromorph in  $\tau^+ \cup \{0\}$ , folgt  $f_1(\xi) \equiv \dots \equiv f_l(\xi) \equiv 0$ .

(b) Aus  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi) B_k(z, \xi) = 0$  auf dem Raum  $J_{z+\xi}$ , wobei  $f_1(\xi), \dots, f_l(\xi)$  meromorph für  $\xi \in \tau^+$  und  $\hat{\xi} - \xi \in \tau^+$ , folgt  $f_1(\xi) \equiv \dots \equiv f_l(\xi) \equiv 0$ .

b) Bemerkungen:

- 1) Aus der Zerlegung  $A(z) A(z+\xi) = \sum_{k=1}^L u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  erhält man unmittelbar eine Operatorproduktentwicklung, denn nach (Z 2) ist für  $\phi_m(\underline{z}) \in \mathcal{J}_z$  der Zustand  $B_k(z, \xi) \phi_m(\underline{z})$  holomorph für  $\xi = 0$ . Daher existiert eine Potenzreihenentwicklung um den Punkt 0.

$B_k(z, \xi) \phi_m(\underline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_n} \{ \dots \}^{\mu_n} B_{k, \mu_1, \dots, \mu_n}(z, 0) \phi_m(\underline{z})$ . Der Konvergenzradius hängt im allgemeinen von  $z$  und dem Zustand  $\phi_m(\underline{z})$  ab.

- 2) Der Name "Lineare Unabhängigkeit" für die Bedingung (Z 3) wird leichter verständlich, wenn man beachtet, daß die in  $\mathcal{U}(0)$  meromorphen Funktionen  $f$  einen Körper  $|\mathcal{K}_{\mathcal{U}(0)}$  bilden. Die in  $\mathcal{U}^+$  meromorphen Funktionen  $u$  bilden dann einen Vektorraum  $\mathcal{V}$  über diesem Körper. (Z 3a) bedeutet die lineare Unabhängigkeit von  $u_1, \dots, u_l$  über allen Körpern  $|\mathcal{K}_{\mathcal{U}(0)}$ . (Z 3b) wird in Abschnitt I.4 näher erläutert.

c) Beispiele:

Motiviert wurde die Zerlegung von  $A(z) A(z+\xi)$  in die endliche Summe  $\sum_{k=1}^L u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  durch die Verhältnisse beim freien Feld und den daraus abgeleiteten Wickpolynomen [1].

- 1) Freies Feld  $\varphi(x)$  zur Masse  $m$  - d.h.  $(\square + m^2) \varphi(x) = 0$

Aus dem Wicktheorem für  $\varphi(x) \varphi(y)$  leitet man sofort ab:

$$\varphi(z) \varphi(z+\xi) = W_2(\xi) + : \varphi(z) \varphi(z+\xi) :$$

$W_2(\xi)$  ist die Zweipunktfunktion  $(\Omega, \varphi(z) \varphi(z+\xi) - \Omega)$  des Feldes.

Da alle  $n$ -Punkt-Funktionen in Produkte von Zweipunktfunktionen zerfallen, gilt für die Zustände  $\phi_m(\underline{z}) = \varphi(z_1) \dots \varphi(z_m) \Omega \in \mathcal{J}_z$

$$\| : \varphi(z) \varphi(z+\xi) : \phi_m(\underline{z}) \| = \| \{ \varphi(z) \varphi(z+\xi) - W_2(\xi) \} \phi_m(\underline{z}) \| \text{ stetig für } \xi \in \mathcal{U}(0)$$

und ferner für alle  $\phi_m(\underline{\hat{z}}) \in \mathcal{J}$

$(\phi_m(\underline{\hat{z}}), : \varphi(z) \varphi(z+\xi) : \phi_m(\underline{z})) = (\phi_m(\underline{\hat{z}}), \varphi(z) \varphi(z+\xi) \phi_m(\underline{z})) - W_2(\xi) (\phi_m(\underline{\hat{z}}), \phi_m(\underline{z}))$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{U}(0)$ . Als  $\mathcal{U}_r(0)$  kann man hier  $\mathbb{R}^4$  wählen. Daraus folgt die holomorphe Fortsetzbarkeit von  $: \varphi(z) \varphi(z+\xi) : \phi_m(\underline{z})$  zu  $\xi \in \mathcal{U}(0) \supset \mathbb{R}^4$  (siehe Anhang B). Damit sind die Bedingungen (Z) erfüllt. Man erhält eine Zerlegung in zwei Terme

$$\varphi(z)\varphi(z+f) = u_1(f)B_1(z,f) + u_2(f)B_2(z,f) \quad \text{dabei ist}$$

$$u_1(f) = W_2(f), u_2(f) \equiv 1 \quad \text{und} \quad B_1(z,f) = \text{Identität}, B_2(z,f) = : \varphi(z)\varphi(z+f):$$

Die gleichen Überlegungen würden auch gelten, falls  $\varphi(x)$  ein verallgemeinertes freies Feld [13] wäre.

## 2) Wick-Polynome in freien Feldern

Ein Beispiel für eine Zerlegung in drei Terme liefert bereits das Wick-quadrat  $A(x) = : \varphi^2(x) :$  wobei  $\varphi(x)$  ein freies Feld ist, und zwar gilt:

$$A(z)A(z+f) = 2W_2^2(f) + 4W_2(f) : \varphi(z)\varphi(z+f) : + : A(z)A(z+f) :$$

$W_2(f)$  bedeutet hier die Zweipunktfunktion  $(\Omega, \varphi(z)\varphi(z+f)\Omega)$ .

Aus der Zerlegung ist ersichtlich, daß  $(\Omega, A(z)A(z+f)\Omega) = 2W_2^2(f)$ .

Nimmt man kompliziertere Wick-Polynome als Ausgangspunkt, so erhält man ähnlich geartete Zerlegungen.

Bei diesen Beispielen sind die singulären Funktionen  $u(f)$  sogar holomorph in der Vorwärtströhre, was man wohl im allgemeinen nicht erwarten kann. Auffallend ist weiter, daß es eine gewisse Ordnung unter den Singularitäten gibt - in Beispiel 2:  $W_2^2(f)$ ,  $W_2(f)$  und 1 -, wobei die stärkste Singularität durch die Zweipunktfunktion  $(\Omega, A(z)A(z+f)\Omega)$  gegeben ist.

## d) Ausblick

Auf ähnliche Art und Weise könnte man Zerlegungen des Produktes mehrerer Feldoperatoren durch

$$A(z)A(z+f_1)\cdots A(z+f_1+\cdots+f_n) = \sum_{k=1}^n u_k(f) G_k(z,f) \quad \text{definieren,}$$

wobei die  $u_k(f)$  meromorph in  $\tau_n^+$  sind.

Das Folgende beschränkt sich jedoch mit einer Ausnahme in Kapitel II auf das Produkt zweier Feldoperatoren.

## I.3 Folgerungen für Jostzustände und Wightmanfunktionen

Die Zerlegung des Operatorproduktes zweier Feldoperatoren in

$A(z)A(z+f) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(f) B_k(z,f)$  mit den Eigenschaften (Z 1) - (Z 3) hat nun weitreichende Konsequenzen.

- a) Nach Definition ist der Vektor  $B_k(z, \xi) \Omega$  holomorph für  $\xi \in \tau^+ \cup U(0)$  wobei  $U(0)$  die reelle Umgebung  $U_r(0)$  umfaßt und von  $z$  abhängen kann.

Definiert man  $\phi_{z,k}(\xi, z+\xi) := B_k(z, \xi) \Omega$  so erhält man

$$\phi_z(\xi, z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi) \phi_{z,k}(\xi, z+\xi)$$

Ähnliches gilt für Vektoren  $\phi_m(z)$ . Mit  $z_1 = z + \xi + \xi_1, \dots, z_m = z + \xi + \xi_1 + \dots + \xi_m$  ist  $B_k(z, \xi) \phi_m(z + \xi + \xi_1, \dots, z + \xi + \xi_1 + \dots + \xi_m)$  holomorph für  $z \in \tau^+$  und  $(\xi, \xi_1, \dots, \xi_m) \in [\tau^+ \cup U_r(0)] \times \tau_m^+$ . Das führt zur Zerlegung

$$\phi_{m+1}(\xi, z+\xi, \dots, z+\xi_1+\dots+\xi_m) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi_1) \phi_{m+1,k}(\xi, z+\xi_1, \dots, z+\xi_1+\dots+\xi_m)$$

Für festes  $z \in \tau^+$  sind die Vektoren  $\phi_{m+1,k}(z, z+\xi_1, \dots, z+\xi_1+\dots+\xi_m)$  holomorph für  $\xi \in [\tau^+ \cup U_r(0)] \times \tau_{m-1}^+$ , wobei  $U(0)$  von  $z$  abhängt und  $U_r(0)$  umfaßt.

- b) Diese Eigenschaft der Jostzustände induziert natürlich eine Zerlegung aller Wightmanfunktionen  $W_{n+1}(\xi)$ .

$$\begin{aligned} W_{n+1}(\xi) &= (\phi_{j-1}(\bar{z}_{j-2}, \dots, z_0), \phi_{m-j+2}(\bar{z}_{j-1}, z_j, \dots, z_m)) \\ &= (\phi_{j-1}(\bar{z}_{j-1} - \bar{\xi}_{j-1}, \dots, \bar{z}_{j-1} - (\bar{\xi}_{j-1} + \dots + \bar{\xi}_1)), \phi_{m-j+2}(\bar{z}_{j-1}, \bar{z}_{j-1} + \xi_j, \dots, \bar{z}_{j-1} + \xi_j + \dots + \xi_m)) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi_j) \underbrace{(\phi_{j-1}(\bar{z}_{j-1} - \bar{\xi}_{j-1}, \dots), \phi_{m-j+2,k}(\bar{z}_{j-1}, \bar{z}_{j-1} + \xi_j, \dots, \bar{z}_{j-1} + \xi_j + \dots + \xi_m))}_{\text{holomorph für } \xi \in \tau_m^+ \text{ und für } \xi_j \in U_r(0) \text{ falls}} \\ &\quad (\xi_j, \bar{\xi}) = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_m) \in \tau_{m-1}^+ \end{aligned}$$

Die gleiche Zerlegung erhält man, wenn  $z_{j-1}$  durch  $\hat{z}_{j-1}$  ersetzt wird, falls nur  $z_{j-1}$  und  $\hat{z}_{j-1}$  genügend nahe beieinander liegen. Bildet man die Differenz, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi_j) \{ (\phi_{j-1}(\bar{z}_{j-1} - \bar{\xi}_{j-1}, \dots), \phi_{m-j+2,k}(\bar{z}_{j-1}, \bar{z}_{j-1} + \xi_j, \dots)) \\ &\quad - (\phi_{j-1}(\bar{\hat{z}}_{j-1} - \bar{\xi}_{j-1}, \dots), \phi_{m-j+2,k}(\bar{\hat{z}}_{j-1}, \bar{\hat{z}}_{j-1} + \xi_j, \dots)) \} \end{aligned}$$

für alle  $\xi_j \in \tau^+ \cup U_r(0)$  falls  $(\xi_j, \bar{\xi})$  fest. Nach Voraussetzung (Z 3a) folgt daraus die Translationsinvarianz der Matrixelemente

$$G_{m+1,k}^{(j)}(\xi) := (\phi_{j-1}(\bar{z}_{j-1} - \bar{\xi}_{j-1}, \dots), \phi_{m-j+2,k}(\bar{z}_{j-1}, \bar{z}_{j-1} + \xi_j, \dots))$$

Damit erhält man

$$W_{n+1}(\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_j) G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

wobei die Funktionen  $G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$  holomorph für

$$\xi = (\xi_j, \xi_j, \bar{\xi}) \in \mathcal{O}_{n+1}^{(j)} \supset \mathcal{C}_+^{j-1} \times [\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{U}_+(0)] \times \mathcal{C}_{n-j}^+ \text{ sind.}$$

c) Lorentzinvarianz von  $G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$

Für  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  (reelle, eigentliche und orthochrone Lorentztransformation)

$$\text{gilt: } W_{n+1}(\Lambda \xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\Lambda \xi_j) G_{n+1,k}^{(j)}(\Lambda \xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_j) G_{n+1,k}^{(j)}(\Lambda \xi)$$

Aus  $W_{n+1}(\Lambda \xi) = W_{n+1}(\xi)$  folgt damit

$$0 = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_j) \{ G_{n+1,k}^{(j)}(\Lambda \xi) - G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) \}$$

Voraussetzung (Z 3a) ergibt wiederum

$$G_{n+1,k}^{(j)}(\Lambda \xi) = G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) \quad \text{für alle } \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$$

Nach dem Theorem von Hall und Wightman [15] sind daher die Funktionen

$G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$  invariant unter den komplexen Lorentztransformationen aus  $L_+(\mathbb{C})$ .

Dadurch wird das Holomorphiegebiet erweitert zu

$$\mathcal{O}_{n+1}^{(j)'} := \{ \Lambda \xi \mid \Lambda \in L_+(\mathbb{C}), \xi \in \mathcal{O}_{n+1}^{(j)} \}$$

Dies umfaßt die erweiterte Röhre  $\mathcal{C}_m'$  und die Menge  $\xi_j = 0, (\xi_j, \bar{\xi}) \in \mathcal{C}_{m-1}'$

d) Ähnlich wie in Teil (c) folgt aus der Symmetrie

$$W_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = W_{n+1}(-\bar{\xi}_n, \dots, -\bar{\xi}_1) \quad \text{eine entsprechende Beziehung}$$

unter den Funktionen  $G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$  - nämlich

$$G_{n+1,k}^{(j)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = G_{n+1,k}^{(n+1-j)}(-\bar{\xi}_n, \dots, -\bar{\xi}_1). \quad \text{Insbesondere gilt}$$

$$G_{2m,k}^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_m) = G_{2m,k}^{(n)}(-\bar{\xi}_m, \dots, -\bar{\xi}_1). \quad \text{Dies bedeutet, daß}$$

$$G_{2m,k}^{(n)}(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, \xi_m, -\bar{\xi}_{m-1}, \dots, -\bar{\xi}_1) \text{ reell ist, falls } \xi_m = -\bar{\xi}_m \text{ gilt.}$$

e) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht nun zwischen den einzelnen Funktionen

$G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$ , die zu gleichen Werten von  $n$  und  $k$ , aber zu verschiedenen

$j \in \{1, \dots, n\}$  gehören. Dazu betrachtet man

$$W_{n+1}(\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_1) G_{n+1,k}^{(1)}(\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_j) G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) \quad \text{für } \xi \in \mathcal{C}_m'$$

$\pi(j)$  sei die Permutation  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & j & j+1 & \dots & n \\ j-1 & j & 0 & \dots & j-2 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$  Entsprechend

sei  $\xi_{\pi(j)} = (\xi_{j-1}, \xi_j, \xi_0, \dots, \xi_{j-2}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n)$  und der zugehörige Differenzvektor sei  $\xi_{\pi(j)} = (\xi_j, -(\xi_1 + \dots + \xi_j), \xi_1, \dots, \xi_{j-2}, \xi_{j-1} + \xi_j + \xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n)$  Nun gilt

$$W_{n+1}(\xi) = W_{n+1}(\xi_{\pi(j)}) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi_j) G_{n+1,k}^{(1)}(\xi_{\pi(j)})$$

Für  $\xi \in \mathcal{C}'_{n,\pi(j)} \cap \mathcal{C}'_n$  gilt dann

$$0 = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi_j) \{ G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) - G_{n+1,k}^{(1)}(\xi_{\pi(j)}) \}$$

Definiert man  $\mathcal{G}_{n+1,\pi(j)}^{(1)}$  durch  $\mathcal{G}_{n+1,\pi(j)}^{(1)} := \{ \xi \mid \xi_{\pi(j)} \in \mathcal{G}_{n+1}^{(1)} \}$ , so erkennt man leicht, daß der Durchschnitt von  $\mathcal{G}_{n+1,\pi(j)}^{(j)}$  mit  $\mathcal{G}_{n+1,\pi(j)}^{(1)}$  eine offene, nichtleere Menge und für festes  $(\xi_j, \xi')$  eine Umgebung  $U(0)$  für das Argument  $\xi_j$  enthält. Aus Voraussetzung (Z 3a) folgt wieder

$G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) = G_{n+1,k}^{(1)}(\xi_{\pi(j)})$  Dies führt erneut zu einer Erweiterung des Holomorphiegebietes von  $G_{n+1,k}^{(1)}(\xi)$ . Es umfaßt nun  $\bigcup_{j=1}^n \mathcal{G}_{n+1,\pi(j)}^{(j)}$ .

Ähnliches gilt für die anderen Funktionen  $G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$ . Für festes  $n$  und  $k$  gehen also die einzelnen Funktionen durch geeignete Permutationen und holomorphe Fortsetzung auseinander hervor.

#### I.4 Die spezielle Rolle der Vierpunktfunktion

Im letzten Abschnitt wurde aus  $A(z) A(z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  auf die Zerlegbarkeit der  $n$ -Punkt-Funktionen bezüglich des Arguments  $\xi_j$   
 $W_{n+1}(\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi_j) G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$  geschlossen. Folgerung (e) besagte, daß es bei festem  $n$  und  $k$  genügt, die Funktion  $G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$  zu kennen. Alle anderen Funktionen, die zu  $j' \neq j$  gehören, gehen durch Permutation der Argumente und holomorphe Fortsetzung daraus hervor. Ist daher die Zerlegung des Zustandes  $\Phi_2(z, z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi) \phi_{2,k}(z, z+\xi)$  bekannt, so sind alle Funktionen  $G_{n+1,k}^{(j)}(\xi)$  festgelegt! Die ganze Information über  $\Phi_2(z, z+\xi)$  ist aber in den Funktionen  $W_2(\xi)$ ,  $W_3(\xi_1, \xi_2)$  und  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  enthalten.

Hilfssatz 1: Ist  $\psi \in \mathcal{J}_2^{\perp}$  (d.h.  $(\psi, \phi_2(z, z+\xi)) = 0$  für  $(z, \xi) \in \mathcal{C}_2^+$ ), so gilt

$$(\psi, \phi_{2,k}(z, z+\xi)) \equiv 0 \text{ für alle } z, \xi \text{ und alle } k = 1, \dots, \ell.$$

Beweis: Für festes  $z \in \mathcal{V}^+$  ist  $\phi_{2,k}(z, z+\xi)$  holomorpher Vektor für  $\xi \in \mathcal{V}^+ \cup U(0)$ , wobei  $U(0)$  die reelle Umgebung  $U_r(0)$  umfaßt. Für  $\psi \in \mathcal{J}_2^\perp$  gilt

$$(\psi, \phi_2(z, z+\xi)) = 0 = \sum_{k=1}^n u_k(\xi) (\psi, \phi_{2,k}(z, z+\xi)) \quad \text{und} \quad (\psi, \phi_{2,k}(z, z+\xi))$$

ist holomorph für  $\xi \in \mathcal{V}^+ \cup U(0)$ . Daher kann man wieder (Z 3a) anwenden und erhält  $(\psi, \phi_{2,k}(z, z+\xi)) \equiv 0$  für alle  $z, \xi$  w.z.z.w.

Bemerkung 1: Hilfssatz 1 besagt, daß  $\phi_{2,k}(z, z+\xi) \in \overline{\mathcal{J}_2} (= (\mathcal{J}_2^\perp)^\perp)$  für alle zulässigen  $(z, \xi)$  ist.

Satz (I.1): Sei  $D_\xi$  ein Differentialoperator nach den Komponenten von  $\xi$  und sei  $w_4(\xi_3, \xi_3) = \sum_{k=1}^3 u_k(\xi_3) G_{4,k}^{(3)}(\xi_3, \xi_3)$ . Dann gilt:

$$D_{\xi_3} G_{4,k}^{(3)}(\xi_3, \xi_3) \Big|_{\xi_3=\xi_0} \equiv 0 \quad \text{für alle } \xi_3 \in \mathcal{V}_2^+ \quad \left\{ D_\xi B_k(z, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \equiv 0 \right.$$

als Operator.

Bemerkung 2: Alle möglichen Singularitäten des Produkts  $A(z) A(z+\xi)$  treten daher bereits in der Vierpunktfunktion auf.

Beweis: Aus  $D_{\xi_3} G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \Big|_{\xi_3=\xi_0} \equiv 0$  für  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{V}_2^+$  folgt

$$(\phi_2(z_1, z_2), D_\xi \phi_{2,k}(z, z+\xi) \Big|_{\xi=\xi_0}) = 0 \quad \text{für alle } \phi_2(z_1, z_2) \in \mathcal{J}_2$$

Dies bedeutet  $D_\xi \phi_{2,k}(z, z+\xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \equiv 0$  nach Hilfssatz 1. Daher gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$   $D_{\xi_n} G_{n+1,k}^{(n)}(\xi_0, \xi_n) \Big|_{\xi_n=\xi_0} \equiv 0$ . In den Koordinaten  $(z_0, \dots, z_n)$

geschrieben bedeutet das  $D_{z_n} G_{n+1,k}^{(n)}(z_1-z_0, z_2-z_1, \dots, z_n-z_{n-1}) \Big|_{z_n-z_{n-1}=\xi_0} \equiv 0$ . Nun gilt nach Folgerung (e) aus I.3 die Beziehung

$$G_{n+1,k}^{(j)}(z_1-z_0, \dots, z_n-z_{n-1}) = G_{n+1,k}^{(n)}(z_1-z_0, \dots, z_{j-1}-z_{j-2}, \dots, z_{j-1}-z_n, z_j-z_{j-1})$$

(dies entspricht der Permutation  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & j-1 & j & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 0 & 1 & \dots & j+1 & j+2 & \dots & n & j-1 & j \end{pmatrix}$ )

Also ist  $D_{z_j} G_{n+1,k}^{(j)}(z_1-z_0, \dots, z_n-z_{n-1}) \Big|_{z_j-z_{j-1}=\xi_0} \equiv 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$

Dies hat nun zur Folge, daß alle Matrixelemente  $(\psi, D_\xi B_k(z, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \phi)$  identisch verschwinden, falls  $\psi \in \mathcal{J}$  und  $\phi \in \mathcal{J}_2'$ , mit  $z'-z \in \mathcal{V}^+$ . Daher ist

$$D_\xi B_k(z, \xi) \Big|_{\xi=\xi_0} \equiv 0 \quad \text{auf dem ganzen Definitionsbereich.} \quad \text{w.z.z.w.}$$

Bemerkung 3: Ist insbesondere  $G_{4,k}^{(3)}(\xi) = 0$ , identisch in  $\xi$ , so gilt  $B_k(z, \xi) \equiv 0$ . Da keiner der Operatoren  $B_k(z, \xi) \equiv 0$  sein soll, verschwindet keine der Funktionen  $G_{4,k}^{(3)}(\xi)$  identisch.

Auf Grund des soeben bewiesenen Satzes ist es verständlich, daß es für die Bedingung (Z 3b) (d.h. lineare Unabhängigkeit der Operatoren  $B_k(z, \xi)$ ) genügt eine ähnliche Forderung an die Vierpunktfunktion zu stellen.

Satz (I. 2): Die Bedingung (Z 3b) ist äquivalent zu folgender Aussage:

(Z 3b<sup>\*</sup>) Sind  $f_1, \dots, f_l$  meromorphe Funktionen für  $\xi \in \mathcal{O} \subset \tau^+$ , so folgt aus  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi_3) G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv 0$  für  $\xi \in \tau_2^+ \times \mathcal{O}$  stets  $f_1 \equiv \dots \equiv f_l \equiv 0$ .

Beweis: (Z 3b<sup>\*</sup>) impliziert (Z 3b) klarerweise.

Die umgekehrte Richtung wird indirekt bewiesen.

Sei  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi_3) G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv 0$  für  $\xi \in \tau_2^+ \times \mathcal{O}$  aber ein  $f_k(\xi_3) \not\equiv 0$ . Daraus folgt für alle  $\phi_2(z_1, z_2) \in \mathcal{J}_2$ :

$$(\phi_2(z_1, z_2), \sum_{k=1}^l f_k(\xi) \phi_{2,k}(z, z+\xi)) \equiv 0$$

Nach Bemerkung 1 ist daher  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi) \phi_{2,k}(z, z+\xi) \equiv 0$  für alle  $z \in \tau^+$

Also gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi_n) G_{n+1,k}^{(n)}(\xi) \equiv 0$ . Durch Permutation der Argumente folgt  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi_j) G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) \equiv 0$  für  $j = 1, \dots, n$ .

Damit erhält man für alle  $\psi \in \mathcal{J}$ ,  $\phi \in \mathcal{J}_2$  mit  $z' - z = \xi \in \tau^+$

$$(\psi, \sum_{k=1}^l f_k(\xi) B_k(z, \xi) \phi) \equiv 0 \quad \text{aber ein } f_k(\xi) \not\equiv 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (Z 3b)!

w.z.z.w.

Bemerkung 4: Satz (I.2) zeigt, daß die Forderung (Z 3b) eigentlich unnötig ist, denn sie kann stets durch Konstruktion erfüllt werden. Dies soll nun durchgeführt werden.

Hilfssatz 2: Ist eine Zerlegung  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  gegeben, die (Z 1), (Z 2) und (Z 3a) erfüllt, so kann man daraus eine Zerlegung konstruieren, die zudem noch (Z 3b) erfüllt.

Beweis: a) Sei  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_2) G_{4,k}^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  die entsprechende Zerlegung der Vierpunktfunktion. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß es

meromorphe Funktionen  $f_1, \dots, f_l$  gibt mit  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi_2) G_{4,k}^{(2)}(\xi) = 0$  und mindestens ein  $f_k \not\equiv 0$ . (Sonst ist (Z 3b) wegen Satz (I. 2) erfüllt !)

b) Seien etwa  $G_{4,1}^{(2)}(\xi), \dots, G_{4,m}^{(2)}(\xi)$  linear unabhängig im Sinne von (Z 3b<sup>x</sup>), aber je  $m+1$  linear abhängig. Dann gilt für  $i > m+1$

$G_{4,i}^{(2)}(\xi) = \sum_{k=1}^m f_{ik}(\xi_2) G_{4,k}^{(2)}(\xi)$  und die Funktionen  $f_{ik}(\xi_2)$  sind meromorph in  $\mathbb{C}^+ \cup U(0)$ .

c) Die Funktionen  $f_{ik}$ ,  $i = m+1, \dots, l$ ;  $k=1, \dots, m$  sind lorentzinvariant unter reellen Lorentztransformationen  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ . Denn aus der Beziehung

$$G_{4,i}^{(2)}(\Lambda \xi) - G_{4,i}^{(2)}(\xi) = 0 = \sum_{k=1}^m \{ f_{ik}(\Lambda \xi_2) - f_{ik}(\xi_2) \} G_{4,k}^{(2)}(\xi) \text{ folgt}$$

$$f_{ik}(\Lambda \xi_2) = f_{ik}(\xi_2) \text{ wegen Teil b.}$$

d) Nach Folgerung (d) aus I.3 besitzen die  $G_{4,k}^{(2)}(\xi)$  die Symmetrie

$$G_{4,k}^{(2)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \overline{G_{4,k}^{(2)}(-\bar{\xi}_3, -\bar{\xi}_2, -\bar{\xi}_1)}.$$

Für die  $f_{ik}$  hat dies die Symmetrie  $f_{ik}(\xi) = \overline{f_{ik}(-\bar{\xi})}$  zur Folge.

e) Aus dem Beweis von Satz (I.2) ersieht man, daß unter den Operatoren  $B_k(z, \xi)$  folgende Relationen erfüllt sind:

$$B_i(z, \xi) = \sum_{k=1}^m f_{ik}(\xi) B_k(z, \xi) \quad \text{für } i = m+1, \dots, l.$$

Eingesetzt in die Zerlegung von  $A(z)A(z+\xi)$  erhält man

$$\begin{aligned} A(z)A(z+\xi) &= \sum_{k=1}^m u_k(\xi) B_k(z, \xi) + \sum_{i=m+1}^l u_i(\xi) \left[ \sum_{k=1}^m f_{ik}(\xi) B_k(z, \xi) \right] \\ &= \sum_{k=1}^m v_k(\xi) B_k(z, \xi) \quad \text{mit} \quad v_k(\xi) = u_k(\xi) + \sum_{i=m+1}^l f_{ik}(\xi) u_i(\xi) \end{aligned}$$

Diese Zerlegung erfüllt nun (Z 1), (Z 2) und (Z 3).

W.Z.Z.W.

Man kann nun über Satz (I.2) hinausgehen und (Z 3b) durch eine Determinantenbedingung an die  $G_{4,k}^{(3)}(\xi)$  formulieren. Dazu sei definiert

$$D(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} | \xi_3) = \begin{vmatrix} G_{4,1}^{(3)}(\xi_1^{(1)}, \xi_3) & \dots & G_{4,l}^{(3)}(\xi_1^{(1)}, \xi_3) \\ \vdots & & \vdots \\ G_{4,1}^{(3)}(\xi_3^{(l)}, \xi_3) & \dots & G_{4,l}^{(3)}(\xi_3^{(l)}, \xi_3) \end{vmatrix}$$

Für  $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} \in \mathbb{C}_+^*$ ,  $\xi_3 \in \mathbb{C}_+^*$  ist  $D(\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} | \xi_3)$  eine holomorphe Funktion.

Bemerkung 5: Bedingung (Z 3b) ist genau dann erfüllt, wenn die Determinante

$D(\xi_3^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} | \xi_3)$  nicht identisch verschwindet. Gilt (Z 3b), dann gibt es Punkte  $\xi_3^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} \in \tau_2^+$ , so daß  $D(\xi_3^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} | \xi_3) \neq 0$  als Funktion von  $\xi_3$ .

Beweis: Folgt unmittelbar aus der linearen Algebra, wenn man als Grundkörper die meromorphen Funktionen in  $\tau^+ \cup U_T(0)$  wählt.

Hilfssatz 3: Die Funktionen  $u_k(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind eindeutig durch  $W_k(\xi)$  und  $G_{4,k}^{(3)}(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  bestimmt. Ihre Randwerte  $u_k(\xi + i0)$  sind Distributionen über  $\mathcal{D}(U_T(0))$ .

Beweis: Nach Bemerkung 5 gibt es Punkte  $\xi_3^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} \in \tau_2^+$ , so daß

$D(\xi_3^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} | \xi_3) \neq 0$ . Daher kann das Gleichungssystem

$W_4(\xi_3^{(i)}, \xi_3) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_3) G_{4,k}^{(3)}(\xi_3^{(i)}, \xi_3)$   $i = 1, \dots, l$  eindeutig nach  $u_1(\xi_3), \dots, u_l(\xi_3)$  aufgelöst werden. Die Kramer'sche Regel liefert

$$u_k(\xi_3) = \frac{\Delta}{D(\xi_3^{(1)}, \dots, \xi_3^{(l)} | \xi_3)} \begin{vmatrix} G_{4,1}^{(3)}(\xi_3^{(1)}, \xi_3) & \dots & W_4(\xi_3^{(1)}, \xi_3) & \dots & G_{4,l}^{(3)}(\xi_3^{(1)}, \xi_3) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_{4,1}^{(3)}(\xi_3^{(l)}, \xi_3) & \dots & W_4(\xi_3^{(l)}, \xi_3) & \dots & G_{4,l}^{(3)}(\xi_3^{(l)}, \xi_3) \end{vmatrix}$$

$\uparrow$   $k$ -te Spalte

Daraus folgen auch unmittelbar die Randwerteigenschaften der  $u_k(\xi + i0)$ , wenn man beachtet, daß die Funktionen  $G_{4,k}^{(3)}(\xi_3, \xi_3)$  holomorph für  $\xi_3 \in U_T(0)$  sind. w.z.z.w.

Mit diesen Bemerkungen und Sätzen ist wohl die zentrale Rolle der Vierpunktfunktion genügend hervorgehoben. Diese Gedanken finden nun wesentliche Anwendung im nächsten Abschnitt. Darüber hinaus geben sie Anlaß den umgekehrten Weg einzuschlagen und zu versuchen aus einer Zerlegung der Vierpunktfunktion eine Zerlegung des Operatorproduktes zu gewinnen.

## I.5 Eindeutigkeit der Zerlegung von $A(z)A(z+\xi)$

Nimmt man an, daß die Zerlegungen - wie in Abschnitt I.2 definiert - existieren, so erhebt sich die Frage, ob es mehrere Möglichkeiten gibt  $A(z)A(z+\xi)$  zu zerlegen und wie weit sich die einzelnen Zerlegungen unterscheiden. Der folgende Satz beantwortet dies.

Satz (I.3): Sei  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi)(z, \xi)$  eine Zerlegung des Operatorproduktes mit den Eigenschaften (Z). Die entsprechende Zerlegung der Vierpunktfunktion sei  $W_4(\xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi_3) G_{4,k}^{(3)}(\xi_2, \xi_3)$ .

A) Sind Funktionen  $a_{ki}(\xi)$  und  $b_{ik}(\xi)$ ,  $k, i = 1, \dots, l$  gegeben mit

$$\alpha) a_{ki}, b_{ik} \text{ meromorph in } \tau^+ \cup U(0), U(0) \supset U_r(0)$$

$$\beta) a_{ki}, b_{ik} \text{ lorentzinvariant}$$

$$\gamma) a_{ki}(-\bar{\xi}) = a_{ki}(\xi), b_{ik}(-\bar{\xi}) = b_{ik}(\xi)$$

$$\delta) \sum_{k=1}^l a_{ik}(\xi) b_{kj}(\xi) = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^l b_{ik}(\xi) a_{kj}(\xi)$$

und gilt für alle  $i = 1, \dots, l$

$$\sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi_3) G_{4,k}^{(3)}(\xi_2, \xi_3) \text{ holomorph in } \tau_2^+ \times [\tau^+ \cup U_r(0)]$$

so definiert

$$v_i(\xi) = \sum_{k=1}^l b_{ik}(\xi) u_k(\xi), \quad C_i(z, \xi) = \sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi) B_k(z, \xi)$$

eine weitere Zerlegung  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{i=1}^l v_i(\xi) C_i(z, \xi)$  mit den Eigenschaften (Z).

B) Sei  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{i=1}^j v_i(\xi) C_i(z, \xi)$  eine Zerlegung, die ebenfalls den Bedingungen (Z) genügt. Dann gilt:

1)  $j = l$ ; d.h. beide Zerlegungen bestehen aus gleich vielen Termen

2) Es gibt Funktionen  $a_{ki}(\xi), b_{ik}(\xi)$  mit den Eigenschaften  $(\alpha)$  bis  $(\delta)$ , so daß gilt:

$$u_k(\xi) = \sum_{i=1}^l a_{ki}(\xi) v_i(\xi), \quad v_i(\xi) = \sum_{k=1}^l b_{ik}(\xi) u_k(\xi)$$

$$B_k(z, \xi) = \sum_{i=1}^l b_{ik}(\xi) C_i(z, \xi), \quad C_i(z, \xi) = \sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi) B_k(z, \xi)$$

Beweis:

A) Es ist nur notwendig zu zeigen, daß die Operatoren  $C_i(z, \xi)$  auf dem Definitionsbereich  $J_z$ , mit  $z'-z-\xi \in \tau^+$ ,  $z'-z \in \tau^+$  holomorph in  $\xi$  sind. Da die Funktionen  $a_{ki}(\xi)$  meromorph in  $\xi$  sind, sind auch die Operatoren  $C_i(z, \xi) = \sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi) B_k(z, \xi)$  zumindest meromorph auf  $J_z'$ .

Nach Voraussetzung ist  $\sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi_3) G_{4,k}^{(3)}(\xi_2, \xi_3)$  holomorph und daher

gilt für alle zulässigen  $\hat{\xi}$

$$(\xi_3 - \hat{\xi})^\mu \sum_{k=1}^{\ell} a_{k,1}(\xi_3) B_{k,1}^{(3)}(\xi_3, \hat{\xi}_3) \Big|_{\hat{\xi}_3 = \hat{\xi}} \equiv 0 \text{ in } \xi_3 \text{ für } \mu = 0, 1, 2, 3$$

Aus Satz (I.1) folgt man nun

$$(\xi - \hat{\xi})^\mu \sum_{k=1}^{\ell} a_{k,1}(\xi) B_{k,1}(z, \xi) \Big|_{\xi = \hat{\xi}} \equiv 0 \equiv (\xi - \hat{\xi})^\mu C_i(z, \xi) \Big|_{\xi = \hat{\xi}} \text{ für } \mu = 0, 1, 2, 3$$

Daher sind die Vektoren, die durch Anwenden von  $C_i(z, \xi)$  auf  $J_z$ , entstehen, holomorph in  $\xi$ . Die restlichen Eigenschaften (Z) sind trivial erfüllt.

B)  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi) B_k(z, \xi) = \sum_{i=1}^j v_i(\xi) C_i(z, \xi)$  sind zwei Zerlegungen des Operatorproduktes  $A(z)A(z+\xi)$ . Dadurch werden zwei Zerlegungen der Vierpunktfunktion induziert.

$$W_4(\xi_3, \xi_3) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi_3) G_k(\xi_3, \xi_3) = \sum_{i=1}^j v_i(\xi_3) H_i(\xi_3, \xi_3)$$

Zur Vereinfachung wurde hier  $G_k(\xi_3, \xi_3)$  und  $H_i(\xi_3, \xi_3)$  an Stelle von  $G_{k,1}^{(3)}(\xi_3, \xi_3)$  und  $H_{i,1}^{(3)}(\xi_3, \xi_3)$  geschrieben.

Nach Bemerkung 5 aus Abschnitt I.4 gibt es Punkte  $\xi_3^{(1)}, \dots, \xi_3^{(1)} \in \mathcal{C}_2^+$ , so daß

$$D(\xi) := \begin{vmatrix} G_1(\xi_3^{(1)}, \xi) & \dots & G_\ell(\xi_3^{(1)}, \xi) \\ \vdots & & \vdots \\ G_1(\xi_3^{(l)}, \xi) & \dots & G_\ell(\xi_3^{(l)}, \xi) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ als Funktion von } \xi.$$

Daher kann das inhomogene Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi) G_k(\xi_3^{(m)}, \xi) = \sum_{i=1}^j v_i(\xi) H_i(\xi_3^{(m)}, \xi) \quad m = 1, \dots, l$$

eindeutig nach  $u_1, \dots, u_\ell$  aufgelöst werden. Nach der Kramer'schen Regel gilt:

$$\begin{aligned} u_k(\xi) &= \frac{1}{D(\xi)} \sum_{i=1}^j \begin{vmatrix} G_1(\xi_3^{(1)}, \xi) & \dots & H_i(\xi_3^{(1)}, \xi) & \dots & G_\ell(\xi_3^{(1)}, \xi) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_1(\xi_3^{(l)}, \xi) & \dots & H_i(\xi_3^{(l)}, \xi) & \dots & G_\ell(\xi_3^{(l)}, \xi) \end{vmatrix} v_i(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^j \frac{D_{ki}}{D}(\xi) v_i(\xi) = \sum_{i=1}^j a_{ki}(\xi) v_i(\xi) \quad k=1, \dots, \ell \end{aligned}$$

$\uparrow$  k-te Spalte

Da  $u_1, \dots, u_l$  linear unabhängig im Sinne von (Z 3a) sind, muß  $1 \leq j$  sein. Entsprechend gibt es  $j$  Punkte  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(j)} \in \mathcal{Z}^+$ , so daß

$$E(\xi) := \begin{vmatrix} H_1(\xi^{(1)}, \xi) & \dots & H_j(\xi^{(j)}, \xi) \\ \vdots & & \vdots \\ H_1(\xi^{(j)}, \xi) & \dots & H_j(\xi^{(j)}, \xi) \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Daher erhält man}$$

$$v_i(\xi) = \frac{1}{E(\xi)} \sum_{k=1}^l \begin{vmatrix} H_1(\xi^{(1)}, \xi) & \dots & G_k(\xi^{(1)}, \xi) & \dots & H_j(\xi^{(j)}, \xi) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ H_1(\xi^{(j)}, \xi) & \dots & G_k(\xi^{(j)}, \xi) & \dots & H_j(\xi^{(j)}, \xi) \end{vmatrix} u_k(\xi)$$

$$\text{also } v_i(\xi) = \sum_{k=1}^l \frac{E_{ik}(\xi)}{E(\xi)} u_k(\xi) = \sum_{k=1}^l b_{ik}(\xi) u_k(\xi) \quad i=1, \dots, j$$

$\uparrow$  i-te Spalte

Da auch die  $v_1, \dots, v_j$  linear unabhängig sind, gilt  $j \leq l$ .

Damit ist Teil 1 bewiesen.

Nach Konstruktion sind  $a_{ki}(\xi)$  und  $b_{ik}(\xi)$  meromorphe Funktionen in  $\mathcal{Z}^+ \cup U(0)$  mit  $U(0) \supset U_r(0)$ . Damit ist (α) erfüllt.

Für  $\lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  gilt  $u_k(\lambda\xi) - u_k(\xi) = 0 = \sum_{i=1}^l \{a_{ki}(\lambda\xi) - a_{ki}(\xi)\} v_i(\xi)$

Weiter gilt  $\overline{u_k(-\bar{\xi})} - u_k(\xi) = 0 = \sum_{i=1}^l \{\overline{a_{ki}(-\bar{\xi})} - a_{ki}(\xi)\} v_i(\xi)$

und ferner

$$\begin{aligned} u_k(\xi) - u_k(\xi) = 0 &= \sum_{i=1}^l a_{ki}(\xi) v_i(\xi) - u_k(\xi) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l a_{ki}(\xi) b_{ij}(\xi) u_j(\xi) - u_k(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^l a_{ki}(\xi) b_{ij}(\xi) - \delta_{kj} \right\} u_j(\xi) \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit (Z 3a) folgen hieraus die Eigenschaften (β);  $a_{ki}(\lambda\xi) = a_{ki}(\xi)$ ,  $(\gamma)$ ;  $\overline{a_{ki}(-\bar{\xi})} = a_{ki}(\xi)$  und die Orthogonalitätsbeziehung (δ);  $\sum_{i=1}^l a_{ki}(\xi) b_{ij}(\xi) = \delta_{kj}$ . Die entsprechenden Eigenschaften für die Funktionen  $b_{ik}(\xi)$  werden analog bewiesen.

Auf dem Definitionsbereich  $J_z$ , gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l u_k(\xi) B_k(z, \xi) &= \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^l a_{ki}(\xi) v_i(\xi) B_k(z, \xi) \\ &= \sum_{i=1}^l \left\{ \sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi) B_k(z, \xi) \right\} v_i(\xi) = \sum_{i=1}^l v_i(\xi) C_i(z, \xi) \end{aligned}$$

Daher gelten die Beziehungen

$$C_i(z, \xi) = \sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi) B_k(z, \xi), \quad B_k(z, \xi) = \sum_{i=1}^l b_{ik}(\xi) C_i(z, \xi)$$

Damit ist Teil B bewiesen. Zusätzlich erhält man eine Methode um die Funktionen  $a_{ki}(\xi)$  und  $b_{ik}(\xi)$  aus den Zerlegungen der Vierpunktfunktion zu berechnen.

## I.6 Stärkste Singularität und Zweipunktfunktion

Die Singularitäten des Operatorproduktes  $A(z)A(z+\xi)$  werden im wesentlichen durch die Funktionen  $u_k(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  der Zerlegung

$H(z)H(z+\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  bestimmt. Natürlich können die Matrixelemente von  $B_k(z, \xi)$  noch zusätzliche Nullstellen für  $\xi = 0$  aufweisen.

### a) Normierung der Operatoren $B_k(z, \xi)$

Die Singularität von  $u_k(\xi)$  kann künstlich erhöht werden, indem man z.B.

$u_k'(\xi) := \frac{1}{\xi^2} u_k(\xi)$  und  $B_k'(z, \xi) := \xi^2 B_k(z, \xi)$  setzt. Diese Willkür muß durch eine Normierung der Operatoren  $B_k(z, \xi)$  beseitigt werden. Dazu wird gefordert

(N) Für alle  $\phi \in J_2, J_2'$  ist der Definitionsbereich von  $B_k(z, \xi)$ ,  $k=1, \dots, l$  - ist  $B_k(z, \xi) \phi$  ein holomorpher Vektor für  $\xi \in U_r(0)$ . Es gibt einen Vektor  $\phi_0 \in J_2$ , so daß  $\frac{1}{\xi^2} B_k(z, \xi) \phi_0$  nicht holomorph für  $\xi \in U_r(0)$  ist.

Auf Grund von Abschnitt I.4 läßt sich die Bedingung (N) in äquivalenter Weise mit den Funktionen  $G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_3)$  formulieren.

(N') Für  $k=1, \dots, l$  gilt:

Für alle  $\xi_1 \in \tau_1^+$  ist  $G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_3)$  holomorph für  $\xi_3 \in U_r(0)$ , jedoch gibt es ein  $\xi_1 \in \tau_1^+$ , so daß  $\frac{1}{\xi_1^2} G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_3)$  nicht holomorph für alle  $\xi_3 \in U_r(0)$  ist.

Oder anders ausgedrückt:

Glaubt man, daß das Theorem von Hall und Wightman [13, 15] auch für die Funktionen  $G_{4,k}^{(3)}(\xi)$  gilt, so gibt es Funktionen  $\hat{G}_k(x_1, \dots, x_6)$ , holomorph für  $x_6 = 0$ , mit  $G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \hat{G}_k(\xi_1^2, \xi_1 \xi_2, \xi_1 \xi_3, \xi_2^2, \xi_2 \xi_3, \xi_3^2)$

Also gilt:  $G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{m=0}^{\infty} (\xi_3^2)^m H_{k,m}(\xi_1^2, \xi_1 \xi_2, \xi_1 \xi_3, \xi_2^2, \xi_2 \xi_3)$

Die Normierung (N') besagt nun nichts anderes, als daß die Koeffizientenfunktion  $H_{k,0}$  nicht identisch verschwindet. Der Beweis des Theorems von Hall und Wightman für Holomorphiegebiete, wie sie die Funktionen  $G_{4,k}^{(3)}$  besitzen, ist jedoch mit Schwierigkeiten verbunden. Später wird dies für Funktionen, die nur von einem Vierervektor abhängen, bewiesen.

#### b) Vergleich der Singularitäten von $u_1(\xi)$ , ..., $u_l(\xi)$

Da die Funktionen  $u_k(\xi)$  lorentzinvariant und meromorph in  $\mathbb{R}^+$  sind, gibt es Funktionen  $v_k(\sigma)$ , meromorph in  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  mit  $u_k(\xi) = v_k(\xi^2)$  [15]. Die Symmetrie  $u_k(-\xi) = \overline{u_k(\xi)}$  hat  $v_k(\bar{\sigma}) = \overline{v_k(\sigma)}$  zur Folge.

Wie kann man nun die Singularitäten von  $v_i(\sigma)$  und  $v_j(\sigma)$  für  $\sigma = 0$  vergleichen. Im allgemeinen macht ja der Ausdruck  $\lim_{\mathbb{C} \setminus [0, \infty) \ni \sigma \rightarrow 0} \left| \frac{v_i(\sigma)}{v_j(\sigma)} \right|$  keinen Sinn. (Man denke nur an den Fall, daß  $v_i(\sigma)$  eine wesentliche Singularität für  $\sigma = 0$  besitzt und  $v_j(\sigma) \equiv 1$  ist !)

Für den Vergleich der Singularitäten sind daher zusätzliche Annahmen nötig. Folgende Formulierung ist für den später zu beweisenden Satz angebracht:

(V) Es gibt ein  $j \in \{1, \dots, l\}$  und eine Nullfolge  $(\sigma_m \mid m \in \mathbb{N}) \subset (-\infty, 0)$

$$\text{so daß } \lim_{\sigma_m \rightarrow 0} \left| \frac{v_i(\sigma_m)}{v_j(\sigma_m)} \right| = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Dies bedeutet also nur, daß die Funktion  $v_j(\sigma)$  bezüglich der Nullfolge  $(\sigma_m \mid m \in \mathbb{N})$  stärker anwächst als die anderen Funktionen  $v_i(\sigma)$  für  $i \neq j$ . Es wird nichts darüber ausgesagt, welche Funktion die nächstschwächere Singularität aufweist.

#### c) Die Zweipunktfunktion als stärkste Singularität [18].

Satz (I.4): Sei  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^l u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  eine Zerlegung, die normiert ist, also (N) bzw. (N') erfüllt. Darüber hinaus sei  $u_1(\xi)$  die stärkste Singularität im Sinne von (V). Dann gilt:  $(\Omega, B_1(z, \Omega) \Omega) = G_{2,1}(0) \neq 0$

Dem Beweis sei ein kurzer Hilfssatz vorausgeschickt.

Hilfssatz 4: Sei  $F(\xi)$  holomorph in  $U(0)$  und sei  $F(\xi) = 0$  falls

$$\xi \in i\mathbb{V}^+ \cap \mathcal{U}(0) \quad \text{und} \quad \xi^2 = 0. \quad \text{Dann gilt:}$$

a)  $F(\xi) = 0$  falls  $\xi^2 = 0$  und  $\xi \in U(0)$

b)  $\frac{F(\xi)}{\xi^2}$  holomorph in  $U(0)$

Beweis:  $f(\xi^2, \vec{\xi}) = F(\xi) = F(\sqrt{\xi^2}, \vec{\xi})$  ist holomorph für  $\vec{\xi} \neq 0$

Daraus folgt  $f(\xi^2, \vec{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\sqrt{\xi^2}, \vec{\xi})(\xi^2)^n$ , wobei die Funktionen  $b_n$  holomorph für  $\vec{\xi} \neq 0$  sind. ( $b_n(\sqrt{\xi^2}, \vec{\xi})$  soll bedeuten, daß  $b_n$  davon abhängen kann, welcher Zweig von  $\sqrt{\xi^2}$  gewählt wird !)

Nun ist  $b_0 = 0$  für  $\vec{\xi} \in i\mathbb{R}^3 \cap (\mathcal{U}(0) \setminus \vec{0})$ ,  $\sqrt{\xi^2}$  positiv. Die Riemann'sche Fläche von  $\sqrt{\xi^2}$  ist zusammenhängend und daher ist  $b_0 \equiv 0$  für  $\vec{\xi} \neq 0$ . Aus dem Kontinuitätssatz [16] folgt die Behauptung. W.Z.Z.W.

Beweis von Satz (I. 4):

1) Aus der Schwarz'schen Ungleichung folgt:

$$|(\Omega, A(\bar{z}_2)A(\bar{z}_1)A(\bar{z})A(z)\Omega)|^2 = |(A(z)A(z_1)A(z_2)\Omega, A(z)\Omega)|^2 \\ \leq (\Omega, A(\bar{z})A(z)\Omega) \cdot (\Omega, A(\bar{z}_2)A(\bar{z}_1)A(\bar{z})A(z)A(z_1)A(z_2)\Omega)$$

Oder durch n-Punkt-Funktionen ausgedrückt

$$|W_4(\xi_1, \xi_2, i\eta)|^2 \leq W_2(i\eta) \cdot W_6(\xi_1, \xi_2, i\eta, -\bar{\xi}_2, -\bar{\xi}_1) \quad \text{für } \eta \in V^+$$

2) Aus  $A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi) B_k(z, \xi)$  ergibt sich für die Wightman-funktionen

$$W_4(\xi_1, \xi_2, i\eta) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(i\eta) G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta)$$

$$W_2(i\eta) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(i\eta) G_{2,k}(i\eta)$$

$$W_6(\xi_1, \xi_2, i\eta, -\bar{\xi}_2, -\bar{\xi}_1) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(i\eta) G_{6,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta, -\bar{\xi}_2, -\bar{\xi}_1)$$

3) Sei nun  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{T}^+$  fest gewählt. Dazu gibt es eine Umgebung  $U(0)$ , so daß  $G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi)$  und  $G_{6,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi, -\bar{\xi}_2, -\bar{\xi}_1)$  holomorph für  $\xi \in U(0)$ .

Zusammen mit (1) und (2) erhält man damit

$$|\sum_{k=1}^{\ell} \frac{u_k}{u_1}(i\eta) G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta)|^2 \leq [\sum_{k=1}^{\ell} \frac{u_k}{u_1}(i\eta) G_{2,k}(i\eta)] \\ \times [\sum_{k=1}^{\ell} \frac{u_k}{u_1}(i\eta) G_{6,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta, -\bar{\xi}_2, -\bar{\xi}_1)]$$

4) Nach (V) gibt es Nullfolge  $(\xi_m | m \in \mathbb{N}) \subset (-\infty, 0)$ , so daß

$$\lim_{\xi_m \rightarrow 0} \frac{v_k(\xi_m)}{v_1(\xi_m)} = 0 \quad \text{für } k = 2, \dots, \ell$$

Zu jedem Punkt  $i\eta \in i\bar{V}^+ \cap \mathcal{U}(0)$  mit  $\eta^2 = 0$  gibt es eine Folge  $i\eta_n \in iV^+$  mit  $\eta_n^2 = \delta_n$  und  $\lim_n i\eta_n = i\eta$ . Also gilt:

$$\lim_n \left| \sum_{k=1}^{\ell} \frac{u_k}{u_1}(i\eta_n) G_{4,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta_n) \right|^2 \leq \lim_n \sum_{k=1}^{\ell} \frac{u_k}{u_1}(i\eta_n) G_{2,k}(i\eta_n) \\ \times \lim_n \sum_{k=1}^{\ell} \frac{u_k}{u_1}(i\eta_n) G_{6,k}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta_n, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1)$$

Daraus folgt für alle  $i\eta \in i\bar{V}^+ \cap \mathcal{U}(0)$  mit  $\eta^2 = 0$

$$|G_{4,1}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta)|^2 \leq G_{2,1}(i\eta) \cdot G_{6,1}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1)$$

5) Angenommen der Satz (I.4) sei falsch und damit  $G_{2,1}(0) = 0$ .

Wegen der Lorentzinvarianz folgt jedoch  $G_{2,1}(i\eta) = G_{2,1}(0) = 0$  für  $\eta^2 = 0$ .

Damit erhält man für  $i\eta \in i\bar{V}^+ \cap \mathcal{U}(0)$  mit  $\eta^2 = 0$

$$G_{4,1}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, i\eta) = 0$$

Setzt man  $F(\xi) = G_{4,1}^{(3)}(\xi_1, \xi_2, \xi)$  und wendet den Hilfssatz 4 an, so erhält man einen Widerspruch zur Normierung ( $N'$ ). w.z.z.w.

#### Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen des Satzes kann nun  $u_1(\xi)$  durch die Zweipunktfunktion  $W_2(\xi)$  ersetzt werden, denn es gilt

$$W_2(\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} u_k(\xi) G_{2,k}(\xi) \quad \text{mit} \quad G_{2,1}(0) \neq 0$$

$$\text{also} \quad u_1(\xi) = \frac{1}{G_{2,1}(\xi)} \left\{ W_2(\xi) - \sum_{k=2}^{\ell} u_k(\xi) G_{2,k}(\xi) \right\}$$

Dies führt zu einer neuen Zerlegung des Operatorproduktes

$$H(z)H(z+\xi) = \frac{W_2(\xi)}{G_{2,1}(\xi)} B_1(z, \xi) + \sum_{k=2}^{\ell} u_k(\xi) \left\{ B_k(z, \xi) - B_1(z, \xi) \frac{G_{2,k}(\xi)}{G_{2,1}(\xi)} \right\} \\ = W_2(\xi) C_1(z, \xi) + \sum_{k=2}^{\ell} u_k(\xi) C_k(z, \xi)$$

mit der Eigenschaft  $(\Omega, C_k(z, \xi)\Omega) = \delta_{1k}$ .

$W_2(\xi)$  ist die stärkste Singularität im Sinne von (V). Im allgemeinen werden jedoch die  $C_k(z, \xi)$  angewandt auf Vektoren  $\Phi \in \mathcal{J}_z$ , nur noch meromorphe Zustände ergeben.

# Anhang A: Clustereigenschaften

Satz: Für  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4m})$ ,  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n})$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^4$  mit  $\alpha^2 < 0$  gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \int \int dx dy f(x) g(y) \phi_{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1 + \lambda \alpha, \dots, y_n + \lambda \alpha) \right) = \mathcal{W}_m(g) \cdot \int dx f(x) \phi_m(x)$$

Beweis:

a) Beh.:  $\left\| \int \int dx dy f(x) g(y) \phi_{m+n}(x_1, \dots, x_m, y_1 + \lambda \alpha, \dots, y_n + \lambda \alpha) \right\|$   
ist beschränkt für  $\lambda \in [0, \infty)$

Bew.:  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| \int \int dx dy f(x) g(y) \phi_{m+n}(x, y + \lambda \alpha) \right\|^2$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| \int \int \int dx' dy' dx dy \bar{g}(y') \bar{f}(x') f(x) g(y) \mathcal{W}_{2m+2n}(\overset{\leftarrow}{y} + \lambda \alpha, \overset{\leftarrow}{x}, x, y + \lambda \alpha) \right\|$$

falls  $\lambda > \lambda_0$  ist dies wegen Lokalität gleich

$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left\| \int \int \int dx' dy' dx dy \bar{g}(y') \bar{f}(x') f(x) g(y) \mathcal{W}_{2m+2n}(\overset{\leftarrow}{x}', x, \overset{\leftarrow}{y} + \lambda \alpha, y + \lambda \alpha) \right\|$$

$$= \mathcal{W}_{2m}(\bar{f} \otimes f) \cdot \mathcal{W}_{2n}(\bar{g} \otimes g) \quad \text{wegen Clustereigenschaften.}$$

W.Z.Z.W.

b) Sei  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4k})$ ,  $k$  beliebig, so gilt wegen Clustereigenschaften

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \phi_k(h), \int \int dx dy f(x) g(y) \phi_{m+n}(x, y + \lambda \alpha) \right) = \mathcal{W}_n(g) \cdot (\phi_k(h), \phi_m(f))$$

Da eine beschränkte Folge von Vektoren schwach konvergiert, falls sie auf einer dichten Teilmenge schwach konvergiert, ist der Satz bewiesen.

Folgerung:

Sei  $\mathcal{D}_0 = \{ \alpha \Omega \mid \alpha \in \mathbb{C} \}$ ,  $\mathcal{D}_k = \{ \phi_k(f) \mid f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4k}) \}$ ,  $k \geq 1$  und

sei  $\mathcal{W}_m(x) \neq 0$  (als Distribution), dann gilt:

$$\mathcal{H}_{m+n} = \overline{\mathcal{D}_{m+n}} \supset \mathcal{D}_m$$

Beweis: Nach Satz gilt für  $\mathcal{W}_n(g) \neq 0$ ,  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{4n})$

$$\phi_{m+n}(f) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{W}_n(g)} \int \int dx dy f(x) g(y) \phi_{m+n}(x, y + \lambda \alpha)$$

$$\{ \phi_m(f) \in \overline{\mathcal{D}_{m+n}} \mid \mathcal{D}_m \subset \overline{\mathcal{D}_{m+n}} \} \quad \text{W.Z.Z.W.}$$

Anhang B: Starke und schwache Holomorphie vektorwertiger Funktionen

$G \subset \mathbb{C}^l$  bezeichne ein Gebiet - d.h.  $G$  offen und zusammenhängend. Für  $z \in G$  sei  $\phi(z) \in \mathcal{H}$  eine vektorwertige Funktion im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ .

Satz: Ist  $\phi(z)$  schwach holomorph in  $G$  - d.h. für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  ist  $(\psi, \phi(z))$  holomorph -, so ist  $\phi(z)$  stark holomorph in  $G$ .

Beweis: Für den Beweis sei auf die Abschnitte III.1.5 und III.1.6 des Buches [17] von T. Kato verwiesen.

Folgerung 1: Ist  $\phi(z)$  beschränkt in  $G$  und gilt für einen dichten Teilraum  $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$  die Beziehung  $(\psi, \phi(z))$  holomorph in  $G$  für alle  $\psi \in \mathcal{D}$ , so ist  $\phi(z)$  eine vektorwertige holomorphe Funktion.

Beweis: Sei  $\psi \in \mathcal{H}$  und sei  $(\psi_n | n \in \mathbb{N})$  eine Folge in  $\mathcal{D}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi - \psi_n\| = 0$ . Da  $\phi(z)$  beschränkt in  $G$ , konvergiert die Folge  $(\psi_n, \phi(z))$  gleichmäßig gegen  $(\psi, \phi(z))$ . Daher ist  $\phi(z)$  schwachholomorph in  $G$ .

Folgerung 2: Im Gebiet  $G$  sei  $\phi(z)$  eine vektorwertige holomorphe Funktion. Wenn für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  die Funktion  $(\psi, \phi(z))$  in das Gebiet  $G' \supset G$  holomorph fortgesetzt werden kann, so ist  $\phi(z)$  als vektorwertige Funktion holomorph nach  $G'$  fortsetzbar.

Beweis: Folgt unmittelbar aus dem Satz durch Anwenden des Kreiskettenverfahrens zur holomorphen Fortsetzung nach  $G'$ .

## II. Kapitel: Operatorproduktentwicklungen für eine spezielle Klasse von Wightmantheorien

In diesem Teil der Arbeit wird der umgekehrte Weg wie in Kapitel I beschritten. Durch Bedingungen an die Vierpunktfunktion  $W_4(\xi)$  wird eine Klasse von Wightmantheorien charakterisiert, für die eine Operatorproduktentwicklung angegeben werden kann. Es handelt sich hier um Vierpunktfunktionen, die eine Zerlegung der Form  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = U(\xi_3) G_4(\xi_1, \xi_2, \xi_4)$  besitzen. Über das ursprünglich gesteckte Ziel einer Entwicklung des Produktes  $A(z)A(z+\xi)$  zweier Feldoperatoren hinausgehend wird unter diesen speziellen Annahmen sogar das Problem einer Operatorproduktentwicklung beliebig vieler Feldoperatoren gelöst.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die Bedingungen an die Vierpunktfunktion formuliert. Danach folgen zur Veranschaulichung einige Beispiele. Die wesentlichen Aussagen über die Wightmanfunktionen  $W_{n+1}(\xi)$  werden in den Abschnitten II.2 bis II.4 gemacht, wobei Abschnitt II.2 im wesentlichen das wiederholt, was bereits in [12] veröffentlicht wurde. Die beiden abschließenden Abschnitte sind Folgerungen und Konsequenzen dieser Sätze für die Operatorprodukte und deren Entwicklungen.

### II.1 Annahmen an die Vierpunktfunktionen und Beispiele

Es wird ein Kriterium für die Vierpunktfunktion eines skalaren Wightmanfeldes angegeben, das dann die Existenz einer Operatorproduktentwicklung zur Folge hat.

#### a) Annahmen an $W_4(\xi)$

(A 1) Es gibt eine Funktion  $r(\xi)$  mit den Eigenschaften

α)  $r$  holomorph für  $\xi \in \tau^+$

β)  $r$  ist invariant unter der homogenen Lorentzgruppe  $\mathcal{L}_+^\uparrow$

γ)  $r(-\xi) = r(\xi)$

δ) Es gibt eine reelle Umgebung  $U_r(0)$  von  $0 \in \mathbb{C}^4$ ,  
so daß  $r(\xi) \in \mathcal{S}'(U_r(0))$

(A 2)  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3)r(\xi_4)$  ist holomorph fortsetzbar zu den Punkten  
 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \tau_2^+ \times U_r(0)$

Bemerkungen:

1) Die Eigenschaften (α) bis (γ) der "regularisierenden" Funktion  $r(\xi)$  entsprechen denen einer Zweipunktfunktion  $W_2(\xi)$ . Forderung (δ) besagt, daß der Randwert  $r(\xi + i0)$  eine Distribution über dem Raum  $\mathcal{D}(U_r(0))$  ist.

2) In der Arbeit [12] wird (δ) durch folgende Bedingung ersetzt:

$$(\delta') \quad \text{Es gibt ein } N \in \mathbb{N}, \text{ so daß für jede kompakte Teilmenge } K \subset V^+ \text{ und alle } \xi \in U_r(0), \frac{\eta}{|\eta|^2} \in K \text{ gilt:}$$

$$|\tau(\xi + i\eta)| \leq C_K (\eta^2)^{-N} \quad \text{für } 0 < \eta^2 \leq 1$$

Wie im Anhang A gezeigt wird, sind beide Bedingungen äquivalent - eventuell muß die Umgebung  $U_r(0)$  eingeschränkt werden.

3) Aus den Eigenschaften (A 1) folgt nach dem Theorem von Hall und Wightman [15] daß  $r(\xi)$  holomorph in  $\tau^+$  und invariant unter der Gruppe  $L_+(\mathbb{C})$  ist. Zudem gibt es eine Funktion  $\hat{r}(\sigma)$ , holomorph für  $\sigma \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ , so daß gilt:

$$\tau(\xi) = \hat{r}(\xi^2)$$

4) Es ist nicht unbedingt notwendig die Holomorphie von  $r$  in ganz  $\tau^+$  zu fordern, es genügt zu verlangen, daß  $r$  meromorph in  $\tau^+$  und holomorph in  $\tau^+ \cap U(0)$  ist, wobei  $U(0)$  eine komplexe Umgebung von  $0 \in \mathbb{C}^4$  ist. Es ist offensichtlich, wie die nachfolgenden Aussagen dieses Kapitels abgeändert werden müßten.

5) Betrachtet man - wie in Kapitel I - Zerlegungen der Vierpunktfunktion, die den Eigenschaften (Z) genügen, aber nur aus einem Term bestehen -

$$W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u(\xi_3) G_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \text{so erkennt man,}$$

daß  $r(\xi)$  im wesentlichen die inverse Funktion zu  $u(\xi)$  darstellt. Die Auswahl der hier betrachteten Wightmanfelder geschieht also durch eine Forderung an die Struktur der Vierpunktfunktion.

Für den Rest dieses Kapitels sollen die Annahmen (A 1) und (A 2) stets erfüllt sein.

b) Beispiele:

Zur Erläuterung des hier beschriebenen Vorgehens und um den Sachverhalt zu veranschaulichen, seien nun drei Beispiele aufgeführt.

# 1) Freies Feld der Masse Null [1]

$$A(x) = \varphi(x), \quad \square \varphi(x) = 0$$

Die Zweipunktfunktion hat die einfache Form

$$\overset{\circ}{W}_2(z_0, z_1) = \overset{\circ}{W}_2(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{-\xi^2}$$

Alle höheren n-Punkt-Funktionen sind dadurch bestimmt

$$\overset{\circ}{W}_{2n-1}(\xi) = \overset{\circ}{W}_{2n-1}(\xi) = 0$$

$$\overset{\circ}{W}_{2n}(\xi) = \sum_{\text{alle Zerlegungen}} \overset{\circ}{W}_2(z_{i_1}, z_{i_2}) \cdots \overset{\circ}{W}_2(z_{i_{2n-1}}, z_{i_{2n}})$$

insbesondere

$$\overset{\circ}{W}_4(z_0, z_1, z_2, z_3) = \overset{\circ}{W}_2(z_0, z_1) \overset{\circ}{W}_2(z_2, z_3) + \overset{\circ}{W}_2(z_0, z_2) \overset{\circ}{W}_2(z_1, z_3) + \overset{\circ}{W}_2(z_0, z_3) \overset{\circ}{W}_2(z_1, z_2)$$

oder in den Differenzvektoren  $\xi$  geschrieben:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{W}_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \overset{\circ}{W}_2(\xi_1) \overset{\circ}{W}_2(\xi_3) + \overset{\circ}{W}_2(\xi_1 + \xi_2) \overset{\circ}{W}_2(\xi_2 + \xi_3) + \overset{\circ}{W}_2(\xi_1 + \xi_3) \overset{\circ}{W}_2(\xi_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{\xi_1^2 \xi_3^2} + \frac{1}{(\xi_1 + \xi_2)^2 (\xi_2 + \xi_3)^2} + \frac{1}{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 \xi_2^2} \right\} \end{aligned}$$

Als regularisierende Funktion kann man etwa

$$\tau(\xi) = -(2\pi)^2 \xi^2 = \overset{\circ}{W}_2^{-1}(\xi) \quad \text{verwenden. Damit erhält man}$$

$$\overset{\circ}{W}_4(\xi) + \tau(\xi_3) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{\xi_3^2}{(\xi_1 + \xi_2)^2 (\xi_2 + \xi_3)^2} + \frac{\xi_3^2}{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 \xi_2^2} \right\}$$

Dies ist holomorph für alle  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \tau_2^+ \times [\tau^+ \cup \mathbb{R}^4]$

Für das Wickprodukt zweier Feldoperatoren gilt:

$$A(z_1)A(z_2) = \overset{\circ}{W}_2(z_1, z_2) + :A(z_1)A(z_2):$$

Daraus folgt:

$$A(z)A(z+\xi) r(\xi) = 1 + r(\xi) :A(z)A(z+\xi):$$

Angewandt auf Zustände  $\Phi_n(z_1, \dots, z_n)$  mit  $z_1, \dots, z_n \in \tau^+$

ist daher  $A(z)A(z+\xi)r(\xi)$  holomorph zu dem Punkt  $\xi \in \mathbb{R}^4$  fortsetzbar. (siehe Abschnitt I.2 Beispiel 1).

## 2) Wickpolynome von freien Feldern der Masse Null [1]

Sei  $A(x) := \sum_{k=1}^{\ell} a_k : \varphi^k : (x)$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$

Für die Zweipunktfunktion erhält man

$$\mathcal{W}_2(z_0, z_1) = \sum_{k=1}^{\ell} a_k^2 (\Omega_1 : \varphi^k(z_0) : \varphi^k(z_1) \Omega_1) = \sum_{k=1}^{\ell} a_k^2 k! [\overset{\circ}{W}_2(z_1 - z_0)]^k$$

( $\overset{\circ}{W}_2(z_1 - z_0)$  ist die Zweipunktfunktion des freien Feldes  $\varphi(x)$  !)

$\mathcal{W}_2(\xi)$  ist also ein Polynom in  $\overset{\circ}{W}_2(\xi)$ . Alle höheren n-Punkt-Funktionen sind ebenfalls eine Summe von Produkten der freien Zweipunktfunktion  $\overset{\circ}{W}_2$ . In der 4-Punkt-Funktion  $\mathcal{W}_4(\xi)$  tritt als singulärster Ausdruck in  $\xi_3$  der Term  $[\overset{\circ}{W}_2(\xi_3)]^1$  auf. Daher ist es möglich,  $r(\xi) = (\xi^2)^1$  zur Regularisierung zu verwenden.

Als spezielles Beispiel sei  $A(x) = : \varphi^2 : (x)$  erwähnt. Die ersten drei Wightmanfunktionen lauten:

$$\mathcal{W}_2(\xi) = 2 [\overset{\circ}{W}_2(\xi)]^2$$

$$\mathcal{W}_3(\xi_1, \xi_2) = 8 \overset{\circ}{W}_2(\xi_1) \overset{\circ}{W}_2(\xi_1 + \xi_2) \overset{\circ}{W}_2(\xi_2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & \mathcal{W}_2(\xi_1) \mathcal{W}_2(\xi_3) + \mathcal{W}_2(\xi_1 + \xi_2) \mathcal{W}_2(\xi_2 + \xi_3) + \mathcal{W}_2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \mathcal{W}_2(\xi_2) \\ & + 16 \{ \overset{\circ}{W}_2(\xi_1) \overset{\circ}{W}_2(\xi_3) \overset{\circ}{W}_2(\xi_1 + \xi_2) \overset{\circ}{W}_2(\xi_2 + \xi_3) \\ & + \overset{\circ}{W}_2(\xi_1) \overset{\circ}{W}_2(\xi_3) \overset{\circ}{W}_2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \overset{\circ}{W}_2(\xi_2) \\ & + \overset{\circ}{W}_2(\xi_1 + \xi_2) \overset{\circ}{W}_2(\xi_2 + \xi_3) \overset{\circ}{W}_2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \overset{\circ}{W}_2(\xi_2) \} \end{aligned}$$

Auch hier ist es zweckmäßig (und möglich !)  $r(\xi) = \mathcal{W}_2^{-1}(\xi)$  zu wählen.

Nach dem Wicktheorem gilt

$$H(z_1) H(z_2) = \mathcal{W}_2(z_1, z_2) + 4 \mathcal{W}_2(z_1, z_2) : \varphi(z_1) \varphi(z_2) : + : H(z_1) H(z_2) :$$

oder

$$H(z) H(z + \xi) r(\xi) = 1 - 8 \pi^2 \xi^2 : \varphi(z) \varphi(z + \xi) : + 8 \pi^4 (\xi^2)^2 : H(z) H(z + \xi) :$$

Wie beim freien Feld zur Masse Null selbst, ist daher  $A(z)A(z')r(\zeta)$  angewandt auf Zustände  $\phi_n(z_1, \dots, z_n) = \varphi(z_1) \dots \varphi(z_n)\Omega$  mit  $z_1 - z_n \in \mathcal{C}^+$  holomorph für alle  $\zeta \in \mathbb{R}^4$ .

Ähnliche Überlegungen gelten auch für Wickpolynome, die aus Ableitungen freier Felder mit Masse Null bestehen - wie zum Beispiel

$$H(x) = : \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi : (x)$$

Die Besonderheit dieser Beispiele liegt darin, daß die Singularitäten der n-Punkt-Funktionen Pole endlicher Ordnung in  $(z_j - z_i)^2$  sind.

3) Exponentialfunktion des freien Feldes zu beliebiger Masse in einer Raum- und einer Zeitdimension [19, 20]

$$H(x) = : e^\varphi : (x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} : \varphi^k : (x) \quad \text{mit} \quad (\square + m^2) \varphi(x) = 0$$

Für die Zweipunktfunktion gilt:

$$\mathcal{W}_2(z_0, z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\Omega, \varphi(z_0) \varphi(z_1) \Omega) = \exp \{ \dot{\mathcal{W}}_2(z_0, z_1) \}$$

Die Beschränkung auf zwei Dimensionen ist nötig, damit der Randwert von  $\mathcal{W}_2(\zeta)$  eine temperierte Distribution ist [19]. Die höheren n-Punkt-Funktionen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{m+1}(\underline{z}) &= (\Omega, H(z_0) \dots H(z_m) \Omega) = \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\Omega, H(z_i) H(z_j) \Omega) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq m} \mathcal{W}_2(z_i, z_j) \end{aligned}$$

also gilt insbesondere

$$\mathcal{W}_4(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \mathcal{W}_2(\zeta_1) \mathcal{W}_2(\zeta_1 + \zeta_2) \mathcal{W}_2(\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3) \mathcal{W}_2(\zeta_2) \mathcal{W}_2(\zeta_2 + \zeta_3) \mathcal{W}_2(\zeta_3)$$

Da die n-Punkt-Funktionen in dieser Weise faktorisieren, ist es klar, daß  $\mathcal{W}_2^{-1}(\zeta)$  zur Regularisierung geeignet ist. In diesem speziellen Fall kann man sogar auf die Randwerteigenschaften von  $r(\zeta)$  verzichten.

Für das Wickprodukt zweier Feldoperatoren ergibt sich

$$H(z_1) H(z_2) = \mathcal{W}_2(z_1, z_2) : H(z_1) H(z_2) :$$

$$\text{oder} \quad : H(z_1) H(z_2) : = H(z_1) H(z_2) + (z_2 - z_1)$$

Daher ist :  $A(z)A(z+\xi)$  : angewandt auf Vektoren der Form

$$\phi_n(\underline{z}) = A(z_1) \dots A(z_n) \Omega, \quad z_1 - z \in \mathcal{C}^+ \quad \text{holomorph für } \xi = 0.$$

Dieses Beispiel kann ebenso in vier Dimensionen behandelt werden, nur verläßt man dann den Rahmen einer Wightmantheorie, da die Wightmandistributionen

$$W_{n+1}(\underline{x}) \text{ nicht mehr temperiert sind [20].}$$

Diese drei Beispiele lassen vermuten, daß die Annahme (A) hinreichend für die Existenz eines Operatorproduktes der Form  $A(z)A(z+\xi)r(\xi)$  ist, das angewandt auf Zustände  $\phi_n(\underline{z})$ ,  $z_1 - z \in \mathcal{C}^+$  holomorph in  $\xi = 0$  ist. Weiter liegt nahe, als  $r(\xi)$  stets  $W_2^{-1}(\xi)$  zu verwenden.

## II.2 Holomorphie von $W_{n+1}(\xi)r(\xi_j)$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, aus den Annahmen (A) die Holomorphie aller regularisierten n-Punkt-Funktionen  $W_{n+1}(\xi)r(\xi_j)$  im Punkt  $\xi_j = 0$  herzuleiten.

Im folgenden ist stets vorausgesetzt, daß die Annahmen (A 1) und (A 2) erfüllt sind.

Satz (II.1): Die regularisierte Wightmanfunktion  $W_{n+1}(\xi)r(\xi_j)$  besitzt eine holomorphe Fortsetzung zu  $\xi_j \in U_+(0)$ ,  $(\xi, \vec{\xi}) = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \in \mathcal{C}_{n-1}^+$ . Dabei hängt die reelle Umgebung  $U_+(0)$  im allgemeinen davon ab, an welcher Stelle sich das Argument  $\xi_j$  innerhalb des n-Tupels  $\xi$  befindet.

Beweis: Da der Beweis an anderer Stelle [12] vorgeführt wird, sei hier darauf verzichtet. Jedoch werden die Hilfssätze, aus denen Satz (II.1) folgt, angegeben und kommentiert.

Bemerkung: Es ist im allgemeinen unmöglich, eine komplexe Umgebung  $U(0) \subset \mathbb{C}^4$  des Punktes 0 anzugeben, so daß  $W_{n+1}(\xi)r(\xi_j)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{C}_{j-1}^+ \times U(0) \times \mathcal{C}_{n-j}^+$  ist. Bereits die regularisierte Vierpunkt-Funktion  $\hat{W}_4(\xi)r(\xi_3)$  des freien, masselosen Feldes  $\varphi(x)$  liefert ein Gegenbeispiel [21]! Denn

$$\hat{W}_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3)r(\xi_3) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\xi_1^2} + \frac{\xi_3^2}{(\xi_1 + \xi_2)^2 (\xi_1 + \xi_3)^2} + \frac{\xi_1^2}{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)^2 \xi_2^2} \right\}$$

ist holomorph für  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathcal{C}_2^+ \times \mathbb{R}^4$ , aber zu jedem Punkt  $\xi_3 \in \mathcal{C}^-$  gibt es  $(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{C}_2^+$ , so daß  $\hat{W}_4(\xi)r(\xi_3)$  singular ist.

Beispielsweise kann man  $\xi_1 \in \mathcal{C}^+$ ,  $\xi_2 = -\xi_3$  wählen.

Hilfssatz 1: Für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  ist die Funktion  $(\psi, \phi_2(z, z+\xi)) + (\xi)$  holomorph zu den Punkten  $(z, \xi) \in \mathcal{T}^+ \times U_r(0)$  fortsetzbar. Dabei ist  $U_r(0)$  die in (A 2) angegebene reelle Umgebung der Null.

Dem Beweis liegt folgende Idee zu Grunde:

- a) Für  $z \in \mathcal{T}^+$  gilt:  $(\psi, \phi_2(z, z+\xi)) + (\xi)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{T}^+$   
 $(\psi, \phi_2(z+\xi, z)) + (\xi)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{T}^-, z+\xi \in \mathcal{T}^+$
- b) Für  $g \in \mathcal{D}(U_r(0))$  existieren - wie im Anhang A gezeigt

$$\int \phi_2(z, z+\xi+i0) + (\xi+i0) g(\xi) d\xi \quad \text{und} \quad \int \phi_2(z+\xi-i0, z) + (\xi-i0) g(\xi) d\xi$$

Wegen der Annahme (A 2) sind diese Randwerte gleich.

- c) Daher stimmen  $(\psi, \phi_2(z, z+\xi+i0)) + (\xi+i0)$  und  $(\psi, \phi_2(z+\xi-i0, z)) + (\xi-i0)$  im Sinne von Distributionen überein. Aus dem Edge of the Wedge- und dem verallgemeinerten Hartogs'schen-Theorem (Beide Sätze werden im Anhang C aufgeführt) folgt Hilfssatz 1.

Zusammen mit der Aussage des mathematischen Anhangs ergibt sich daraus die

Folgerung 1:  $\phi_2(z, z+\xi) + (\xi)$  kann als Vektorwertige holomorphe Funktion von  $(z, \xi)$  zu den Punkten  $(z, \xi) \in \mathcal{T}^+ \times U_r(0)$  fortgesetzt werden.

Hilfssatz 2:  $W_{n+1}(\xi) r(\xi_n)$  ist zu den Punkten  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathcal{T}_{n-1}^+, \xi_n = 0$  holomorph fortsetzbar.

Zum Beweis dieses Hilfssatzes wird die Lorentzinvarianz und das Hartogs'sche Theorem herangezogen.

Zur weiteren Vergrößerung des Holomorphiegebietes wird die Lokalität der Feldoperatoren  $A(x)$  - oder (dazu äquivalent!) die Permutationssymmetrie der Wightmanfunktionen [13] - und folgender Hilfssatz benutzt.

Hilfssatz 3: Sei  $F(\xi_1, \dots, \xi_n)$  holomorph in  $D = \mathcal{T}_n^+ \cup \mathcal{T}_{n,\pi}^+$ , wobei

$\mathcal{T}_{n,\pi}^+ = \{ \xi \mid (\xi_1, \dots, \xi_{j-2}, \xi_{j-1} + \xi_j, -\xi_j, \xi_j + \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \in \mathcal{T}_n^+ \}$  ist, und in den Punkten  $\xi_j = 0, (\xi_j, \vec{\xi}) \in H \subset \mathcal{T}_{n-1}^+ (H \neq \emptyset \text{ offen})$ . Existieren die Randwerte  $F(\xi_1, \dots, \xi_j \pm i0, \dots, \xi_n)$  als Distributionen in  $\xi_j$  und hängen holomorph von  $(\xi_j, \vec{\xi}) \in \mathcal{T}_{n-1}^+$  ab, so hat  $F(\xi)$  eine holomorphe Fortsetzung zu den Punkten  $\xi_j \in V_+(0), (\xi_j, \vec{\xi}) \in \mathcal{T}_{n-1}^+ \cdot V_r(0)$  ist eine reelle Umgebung der  $0 \in \mathbb{A}^4$ .

Bei diesem Schluß von der Holomorphie in  $\xi_n = 0$ ,  $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathcal{U}_r^+$ , auf die Holomorphie in  $\xi_j = 0$ ,  $(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \in \mathcal{U}_{n-1}^+$  kann es geschehen, daß die reelle Umgebung  $V_r(0)$  der Holomorphie verändert wird. Dies kann zu folgender Schwierigkeit führen:

$W_{n+1}(\xi) \cap (\xi_n)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{U}_{n-1}^+ \times U_r(0) \setminus \{0\}$  ist unabhängig von  $n$ )

$W_{n+1}(\xi) \cap (\xi_j)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{U}_{j-1}^+ \times V_r^{(j)}(0) \times \mathcal{U}_{n-j}^+$ . Wegen der Beziehung

$$\begin{aligned} \overline{W_{n+1}(\xi) \cap (\xi_j)} &= W_{n+1}(-\bar{\xi}_n, \dots, -\bar{\xi}_1) \cap (-\bar{\xi}_j) \\ &= W_{n+1}(\hat{\xi}) \cap (\hat{\xi}_{n-j+1}), \quad \hat{\xi} = (-\bar{\xi}_n, \dots, -\bar{\xi}_1) \end{aligned}$$

kann man  $V_r^{(j)}(0)$  und  $V_r^{(n-j+1)}(0)$  gleichsetzen. Für festes  $n$  ist der Durchschnitt dieser  $V_r^{(j)}(0)$  wieder eine Umgebung  $\tilde{V}_r^{(n)}(0)$ . Aber es kann schlimmstenfalls dazukommen, daß  $V := \bigcap_{m=0}^{\infty} \tilde{V}_r^{(n)}(0)$  nur noch aus der  $0 \in \mathbb{C}^n$  besteht und keine reelle Nullumgebung ist. In diesem Falle kann man keine universelle (d.h. von  $n$  und  $j$  unabhängige) Umgebung  $U_r(0)$  in Satz (II.1) benutzen. Von dieser Schwierigkeit wäre man frei, wenn es einem gelänge, das Holomorphiegebiet von  $W_{n+1}(\xi) \cap (\xi_n)$  durch die Invarianten  $(\xi_1 + \dots + \xi_j)^2$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n$  zu charakterisieren. Für  $W_2(\xi) \cap (\xi)$  geschieht dies im Anhang.

Ein anderer Ausweg bestände in der Annahme  $U_r(0) = \mathbb{R}^4$ .

Hilfssatz 4: Jedes Gebiet der Form

$$\begin{aligned} D_{n,j} &= \bigcup_{\pi \in \mathcal{M}_j \cap \delta_{n+1}^+} \mathcal{U}_{n,\pi}^+ \cup \left\{ \xi \mid \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}) \in \bigcup_{\pi \in \delta_{j-1}^+} \mathcal{U}_{j-1,\pi}^+ \right. \\ &\quad \left. \mid |\xi_j| < g(\xi, \bar{\xi}), \bar{\xi} = (\xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \in \bigcup_{\pi \in \delta_{n-j+1}^+} \mathcal{U}_{n-j+1,\pi}^+ \right\} \text{ ist} \end{aligned}$$

einfach zusammenhängend. Dabei bedeutet  $\mathcal{M}_j$  diejenige Untermenge von  $\delta_{n+1}^+$ , die die Elemente  $j-1$  und  $j$  benachbart läßt.  $g(\xi, \bar{\xi})$  ist eine stetige, positive Funktion von  $(\xi, \bar{\xi})$ .

Dieser Hilfssatz hat zur Folge, daß jede Funktion, die holomorph und eindeutig in  $\bigcup_{\pi \in \mathcal{M}_j} \mathcal{U}_{n,\pi}^+$  ist und holomorph zu jedem Punkt in  $D_{n,j}$  fortgesetzt werden kann, eindeutig im erweiterten Holomorphiegebiet ist. Die Fortsetzungen von  $W_{n+1}(\xi) \cap (\xi_j)$  in die Gebiete  $D_{n,j}$  sind daher eindeutige Funktionen.

Im Abschnitt II.4 wird folgende Verallgemeinerung von Satz (II.1) benötigt:

Folgerung 2: Sei  $\pi \in \mathcal{V}_{n+1}$ ;  $\{\pi_{j,j}\} := \{\pi_{(j-1)}\} + \dots + \{\pi_{(j)}\}$  dann ist  $W_{n+1}(\frac{1}{z}\pi) + (\frac{1}{z}\pi_{j,j})$  holomorph zu den Punkten  $\{\pi_{j,j} = 0, (\frac{1}{z}\pi, \frac{1}{z}\pi) \in \mathcal{V}_{n-1}^+$  fortsetzbar.

Der Beweis ist trivial, da man statt  $\frac{1}{z}$  natürlich genauso gut  $\frac{1}{z}\pi$  in den Hilfssätzen 2 und 3 wählen kann.

### II.3 Zusammenhang zwischen der regularisierenden Funktion $r(\xi)$ und der Zweipunktfunktion

Bei den Beispielen in Abschnitt II.1 war es möglich, zur Regularisierung stets  $W_2^{-1}(\xi)$  zu verwenden. Wie weit ist dies nun allgemein gültig?

Zuerst aber noch etwas zur Eindeutigkeit von  $r(\xi)$ .

Sei  $\mathcal{S}(\xi) := h(\xi) + (\xi)$ ,  $h(\xi)$  erfülle (A 1) und sei holomorph für  $\xi \in U_r(0)$ . Es ist klar, daß mit  $r$  auch  $s$  eine regularisierende Funktion darstellt. Es kann auch der Fall eintreten, daß bereits  $\frac{1}{z}r(\xi)$  zur Regularisierung ausreicht. Die Frage nach einer minimalen regularisierenden Funktion wird durch den folgenden Satz beantwortet

Satz (II.2): Unter den Annahmen (A) gibt es eine Funktion  $r'(\xi)$  mit den Eigenschaften

- (1)  $r'(\xi)$  genügt den Bedingungen (A)
- (2) Ist  $F_2(\xi) := W_2(\xi)r'(\xi)$ , so gilt  $F_2(0) = 1$

Bemerkungen:

- 1) Nach Satz (II.1) ist  $F_2(\xi)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{V}^+ \cup U_r(0)$

Daher kann man  $r'(\xi) = \frac{F_2(\xi)}{W_2(\xi)}$  in einer genügend kleinen Umgebung  $V(0)$  durch  $W_2^{-1}(\xi)$  ersetzen. Im allgemeinen wird  $W_2^{-1}(\xi)$  nur in einer Umgebung  $\hat{U}(0) \cap \mathcal{V}^+$  holomorph sein, sonst jedoch eine meromorphe Funktion in  $\mathcal{V}^+$  sein. Die Randwerteigenschaften sind eventuell in einer kleineren reellen Umgebung  $V_r(0)$  als für  $r'(\xi)$  erfüllt.

- 2) Aus  $F_2(\xi) = W_2(\xi) r'(\xi)$  mit  $F_2(0) = 1$  folgt sofort, daß  $r^{-1}(\xi + i0)$  eine Distribution über  $\mathcal{D}(V_r(0))$  mit den gleichen Wachstumseigenschaften wie  $W_2(\xi + i\eta)$  ist.
- 3) Wenn immer in einer n-Punkt-Funktion zwei benachbarte Argumente zusammenrücken, so ist die dabei entstehende Singularität nicht stärker als die Singularität der Zweipunktfunktion.
- 4) Bei Kenntnis der Zwei- und Vierpunktfunktion kann man sofort entscheiden, ob eine Wightmantheorie unter die hier beschriebene Klasse fällt.

Notwendig und hinreichend dafür ist nämlich

- (a)  $W_2^{-1}(\xi)$  ist lokal temperiert (d.h.  $W_2^{-1}(\xi + i0) \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}_+(0))$ )  
 (b)  $\frac{1}{W_2(\xi_3)} \cdot W_4(\xi)$  ist holomorph zu  $\xi \in \mathcal{T}_2^+ \times \{0\}$  fortsetzbar.

Beweis von Satz (II.2):

- (1)  $F_2(\xi) = W_2(\xi) r(\xi)$  ist nach Satz (II.1) holomorph für  $\xi = 0$ .  
 Im Anhang B wird gezeigt, daß es wegen der Lorentzinvarianz eine Funktion  $\hat{F}_2(\xi^2)$  gibt mit  $F_2(\xi) = \hat{F}_2(\xi^2)$  und  $\hat{F}_2(\xi^2)$  holomorph für  $\xi^2 = 0$ .

- (2) Ist  $F_2(0) = C \neq 0$ , so wähle  $r'(\xi) = \frac{1}{C} r(\xi)$ .

(Wegen  $F_2(\xi) = \overline{F_2(-\bar{\xi})}$  ist  $F_2(0) = C$  reell !)

Daher sei angenommen  $F_2(0) = 0$ .

- (3) Behauptung:  $F_2(0) = 0 \wedge W_4(\xi) r(\xi_3) = 0$  für  
 $\xi_3 = i\eta$  mit  $\eta^2 = 0$ ,  $i\eta \in iV^+ \cap \mathcal{U}(0)$

Beweis: Die Schwarz'sche Ungleichung liefert:

$$|(\Omega, A(\bar{z}_2) A(\bar{z}_1) A(\bar{z}) A(z) \Omega) + (z - \bar{z})|^2 \\ \leq (\Omega, A(\bar{z}) A(z) \Omega) + (z - \bar{z}) \cdot (\Omega, A(\bar{z}_2) A(\bar{z}_1) A(\bar{z}) A(z) A(z_1) A(z_2) \Omega) + (z - \bar{z})$$

für  $\xi_1 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ ,  $\xi_2 = \bar{z} - \bar{z}_1$ ,  $\xi_3 = z - \bar{z} \in \mathcal{T}^+$   
 oder umgeschrieben

$$|W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + (\xi_3)|^2 \leq W_2(\xi_3) + (\xi_3) \cdot W_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1) + (\xi_3)$$

falls  $\xi_3 = i\eta$  mit  $\eta \in V^+$  d.h.  $\xi_3 \in iV^+$

Nach Satz (II.1) sind  $W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + (\xi_3)$ ,  $W_2(\xi_3) + (\xi_3)$  und  $W_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_1) + (\xi_3)$  für feste  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^+$  analytisch für  $\xi_3 \in \mathcal{U}(0)$ . Daher gilt die Ungleichung auch für  $\xi_3 \in \overline{\mathcal{V}^+} \cap \mathcal{U}(0)$ .

Für  $i\eta \in \overline{\mathcal{V}^+} \cap \mathcal{U}(0)$  mit  $\eta^2 = 0$  ist nach (2)  $F_2(i\eta) = 0$ . Daraus folgt  $W_4(\xi_1, \xi_2, i\eta) + (i\eta) = 0$ .

(4) Auf  $F(\xi) := W_4(\xi_1, \xi_2, \xi) + (\xi)$  für  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^+$  fest kann man nun Hilfssatz 4 aus Kapitel I anwenden und erhält:

$$\frac{1}{\xi^2} F(\xi) = W_4(\xi_1, \xi_2, \xi) + \frac{(\xi)}{\xi^2} \quad \text{holomorph in } \mathcal{U}(0).$$

(5) Behauptung (3) zusammen mit (4) ergibt:

$$F_2(0) = 0 \quad \text{für} \quad \frac{1}{\xi^2} + (\xi) \quad \text{ist regularisierende Funktion}$$

Ist nun  $\hat{F}_2(\xi^2) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (\xi^2)^k$  so kann man

$(\xi^2)^{-m} + (\xi)$  als regularisierende Funktion verwenden. Für

$$r'(\xi) := \frac{1}{a_m} (\xi^2)^{-m} + (\xi) \quad \text{gilt dann die Behauptung. w.z.z.w.}$$

Folgerung: Für das freie Feld  $\varphi(x)$ ,  $(\square + m^2)\varphi(x) = 0$  mit Masse  $m > 0$  gibt es keine regularisierende Funktion, denn

$$W_4(\xi) \bar{W}_2^{-1}(\xi_3) = W_2(\xi_1) + \{W_2(\xi_1 + \xi_2)W_2(\xi_2 + \xi_3) + W_2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)W_2(\xi_2)\} \bar{W}_2^{-1}(\xi_3)$$

Nun ist zwar  $W_2(\xi_1 + \xi_2)W_2(\xi_2 + \xi_3) + W_2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)W_2(\xi_2)$  holomorph für  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}^+$ ,  $\xi_3 = 0$  jedoch ist  $\bar{W}_2^{-1}(\xi_3)$  singularär für  $\xi_3 = 0$ .

Bemerkung 5: Wird im folgenden von einer regularisierenden Funktion  $r(\xi)$  gesprochen, so soll darunter stets eine normierte und minimale regularisierende Funktion verstanden werden - d.h. für

$$F_2(\xi) := W_2(\xi) + r(\xi) \quad \text{gilt} \quad F_2(0) = 1$$

Sind  $r_1$  und  $r_2$  zwei normierte, minimale regularisierende Funktionen, so folgt

$$r_1(\xi) = r_2(\xi) h(\xi) \quad \text{mit} \quad h(\xi) \quad \text{holomorph in } \mathcal{U}(0) \quad \text{und} \quad h(0) = 1. \quad \text{Diese}$$

Beziehung definiert eine Äquivalenzrelation.

#### II.4 Darstellung der n-Punkt-Funktionen

Man könnte sich nun mit den Sätzen (II.1) und (II.2) zufrieden geben und mit deren Hilfe das Produkt zweier Feldoperatoren für zusammenfallende Argumente definieren. Aber man hat hier die Möglichkeit, darüberhinaus Aussagen über die Singularitäten der n-Punkt-Funktionen herzuleiten, falls eine beliebige Anzahl von Argumenten zusammenrückt.

Zur Formulierung des Satzes sei definiert:

$$i_{n+1}(\xi) = i_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n) \prod_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} (e_{i_1} - e_{i_2}) \dots (e_{i_{n-1}} - e_{i_n}) \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} (e_{i_1} + e_{i_2}) \dots (e_{i_{n-1}} + e_{i_n})$$

$$R_{n+1}(\xi) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} (e_{i_1} + e_{i_2}) \dots (e_{i_{n-1}} + e_{i_n})$$

Satz (II.3):  $F_{n+1}$  ist holomorph zu  $\xi \in [\mathcal{U}_r^{(n)}(0)]^m$  fortsetzbar

Beweis:

(a) Eigenschaften von  $R_{n+1}(\xi)$ :

Aus der Definition

$$R_{n+1}(\xi) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} (e_{i_1} + \dots + e_{i_n}) = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} \hat{r}((e_{i_1} + \dots + e_{i_n})^2)$$

und der Holomorphie von  $\hat{r}$  in  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  folgt:

(1)  $R_{n+1}(\xi)$  ist holomorph für  $\xi \in \bigcup_{\pi \in \delta_{n+1}'} \tilde{\mathcal{U}}_{n+1}, \pi$

(2)  $\bigwedge_{\pi \in \delta_{n+1}'} R_{n+1}(\xi \pi) = R_{n+1}(\xi)$

Nach (A 1) ist  $r(\xi \pm i0) \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}_r(0))$ . Wie im Anhang A gezeigt, gilt daher für alle möglichen Randwerte von  $R_{n+1}(\xi)$ :

(3)  $\lim_{V_m^+ \ni \eta \pi \rightarrow 0} R_{n+1}(\xi + i\eta) \in \mathcal{D}'([\frac{1}{m} \mathcal{U}_r(0)]^m)$

Der Faktor  $\frac{1}{m}$  rührt davon her, daß auch  $\xi_1 + \dots + \xi_m \in \mathcal{U}_r(0)$  gelten muß. Würde man  $\mathcal{U}_r(0) = \mathbb{R}^4$  annehmen, so wäre er überflüssig.

(b) Eigenschaften von  $F_{n+1}(\xi)$ :

Aus den Eigenschaften der Wightmanfunktion  $W_{n+1}(\xi)$  und der regularisierenden Funktion  $R_{n+1}(\xi)$  ergibt sich

(4)  $F_{n+1}(\xi)$  holomorph für  $\xi \in \bigcup_{\pi \in \delta_{n+1}'} \tilde{\mathcal{U}}_{n+1}, \pi$  und invariant unter komplexen Lorentztransformationen  $L_+(\mathbb{C})$

(5)  $\bigwedge_{\pi \in \delta_{n+1}'} F_{n+1}(\xi \pi) = F_{n+1}(\xi)$

(6)  $\lim_{V_m^+ \ni \eta \pi \rightarrow 0} F_{n+1}(\xi + i\eta) \in \mathcal{D}'([\frac{1}{m} \mathcal{U}_r(0)]^m)$

Punkt (6) wird im Anhang A gezeigt.

(c) Folgerungen aus Satz (II.1):

Nach Folgerung 2 zu Satz (II.1) ist  $W_{n+1}(\xi, \pi) + (\xi, \pi_{1,j})$ ,  $\pi \in \delta_{n+1}^+$  holomorph für  $\xi, \pi_{1,j} \in \mathcal{U}_{r,\pi}^{(n)}(0)$ ,  $(\xi, \pi, \bar{\xi}, \bar{\pi}) \in \mathcal{T}_{n-1}^+$ . Dabei hängt die Umgebung von  $n$  und  $\pi \in \delta_{n+1}^+$  ab.

Sei  $\mathcal{U}_r^{(n)}(0) := (\bigcap_{\pi \in \delta_{n+1}^+} \mathcal{U}_{r,\pi}^{(n)}(0)) \cap \frac{1}{n} \mathcal{U}_r(0)$ , so gilt

$$(7) \quad F_{n+1}(\xi) \quad \text{holomorph für } \xi, \pi_{1,j} \in \mathcal{U}_r^{(n)}(0), (\xi, \pi, \bar{\xi}, \bar{\pi}) \in \mathcal{T}_{n-1}^+$$

Für die so gewählte Umgebung wird nun die Behauptung mittels des Edge of the Wedge-Theorems gezeigt.

(d) Idee des Beweises:

$F_{n+1}(\xi)$  ist holomorph in  $\mathcal{T}_n^+$  und  $F_{n+1}(-\xi_1, \dots, -\xi_n) =: F_{n+1}(\xi, \pi)$  holomorph in  $\mathcal{T}_n^-$ . Stimmen die Randwerte  $F_{n+1}(\xi + i0)$  und  $F_{n+1}(\xi - i0)$  auf  $[U_r^{(n)}(0)]^m$  im Sinne von Distributionen überein, so ist Satz (II.3) bewiesen. Zu diesem Zwecke schiebt man  $\frac{n}{2}(n-1)$  weitere Randwerte von  $F_{n+1}(\xi + i\eta)$  so dazwischen, daß die Gleichheit zweier aufeinanderfolgender Randwerte aus Teil (c) folgt.

(e) Definition der Randwerte

Für  $g \in \mathcal{D}([U_r^{(n)}(0)]^m)$  und  $\pi \in \delta_{n+1}^+$  sei definiert

$$(8) \quad G(\eta, \pi) := \int d\xi g(\xi) F_{n+1}(\xi + i\eta), \quad \eta, \pi \in V_n^+$$

Nach Teil (b) existieren die Randwerte

$$(9) \quad G(0, \pi) := \lim_{V_n^+ \ni \eta, \pi \rightarrow 0} G(\eta, \pi)$$

(f) Hilfssatz: Sei  $\pi \in \delta_{n+1}^+$  und  $\tau = (j-1, j)$  (d.h.  $\tau$  ist diejenige Permutation, die  $j-1$  und  $j$  vertauscht), dann gilt:

$$(10) \quad G(0, \pi) = G(0, \pi \circ \tau)$$

Beweis:

(a) nach (c) ist  $F_{n+1}(\xi)$  holomorph für  $\xi, \pi_{1,j} \in \mathcal{U}_r^{(n)}(0)$  und  $(\xi, \pi, \bar{\xi}, \bar{\pi}) \in \mathcal{T}_{n-1}^+$

Nun ist  $\xi_{\pi \circ \sigma, j} = \xi_{\pi \circ \sigma(j)} - \xi_{\pi \circ \sigma(j-1)} = \xi_{\pi(j-1)} - \xi_{\pi(j)} = -\xi_{\pi, j}$

also  $\eta_{\pi \circ \sigma, j} = -\eta_{\pi, j}$ . Für  $\eta_{\pi, j} = 0$  ist aber

$\eta_{\pi \circ \sigma} = \eta_{\pi}$  und daher gilt für die Randwerte

$$(11) \quad G(\eta_{\pi \circ \sigma}) = G(\eta_{\pi}) \quad \text{falls} \quad \eta_{\pi, j} = 0, (\eta_{\pi}, \vec{\eta}_{\pi}) \in V_{m-1}^+$$

Dies ist die Umkehrung des Edge of the Wedge-Theorems.

$$\begin{aligned} (\beta) \quad G(\underline{Q}_{\pi}) &= \lim_{V_{m-1}^+ \ni (\eta, \vec{\eta})_{\pi} \rightarrow 0} \left( \lim_{V^+ \ni \eta_{\pi, j} \rightarrow 0} G(\eta_{\pi}) \right) \\ &= \lim_{V_{m-1}^+ \ni (\eta, \vec{\eta})_{\pi} \rightarrow 0} \left( \lim_{V^+ \ni \eta_{\pi \circ \sigma, j} \rightarrow 0} G(\eta_{\pi \circ \sigma}) \right) = G(\underline{Q}_{\pi \circ \sigma}) \end{aligned}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

(g) Sei  $\pi$  die spezielle Permutation  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ , dann ist

$\xi_{\pi} = (-\xi_{m_1}, \dots, -\xi_{j_1})$  und nach (d) bleibt zu zeigen:

$$G(\underline{Q}) = G(\underline{Q}_{\pi})$$

Um den Hilfssatz anwenden zu können, muß man die Permutation  $\pi$  als Produkt von Zweierzyklen der Form  $(j-1 \ j)$  schreiben.

Behauptung:  $\pi = (01)(12) \dots (n-1 \ n) (01) \dots (n-2 \ n-1) (01) \dots (23)(01)(12)(01)$

Beweis: Sei  $\sigma_k = (01)(12) \dots (k-1 \ k)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_k(1) = \begin{cases} 1+1 & 1 < k \\ 0 & 1 = k \\ 1 & 1 > k \end{cases} \end{array} \right. \quad 1 = 0, 1, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \pi(\ell) &= [\sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_1](\ell) = [\sigma_m \dots \sigma_{\ell}](\ell) = [\sigma_m \dots \sigma_{\ell+1}](0) \\ &= [\sigma_m \dots \sigma_{\ell+2}](1) = \dots = m - \ell \end{aligned}$$

Nach dem Hilfssatz ist damit Satz (II.3) bewiesen, denn

$$G(\underline{Q}) = G(\underline{Q}_{(01)}) = G(\underline{Q}_{(01)(12)}) = \dots = G(\underline{Q}_{\pi})$$

(h) Es mag instruktiv sein die einzelnen Limiten im Falle von

$$F_3(\xi_1, \xi_2) = W_3(\xi_1, \xi_2) + (\xi_1) + (\xi_1 + \xi_2) + (\xi_2) \text{ anzugeben:}$$

$$G(\gamma) = \int d\xi g(\xi) \omega_3(z, z + \xi_1 + i\gamma_1, z + \xi_1 + \xi_2 + i(\gamma_1 + \gamma_2)) R_3(\xi + i\gamma) \\ \gamma_1, \gamma_2 \in V^+$$

$$G(\gamma_{(0,1)}) = \int d\xi g(\xi) \omega_3(z + \xi_1 + i\gamma_1, z, z + \xi_1 + \xi_2 + i(\gamma_1 + \gamma_2)) R_3(\xi + i\gamma) \\ -\gamma_1, \gamma_1 + \gamma_2 \in V^+$$

$$G(\gamma_{(0,1)(1,2)}) = \int d\xi g(\xi) \omega_3(z + \xi_1 + i\gamma_1, z + \xi_1 + \xi_2 + i(\gamma_1 + \gamma_2), z) R_3(\xi + i\gamma) \\ \gamma_2, -(\gamma_1 + \gamma_2) \in V^+$$

$$G(\gamma_{(0,1)(1,2)(0,1)}) = \int d\xi g(\xi) \omega_3(z + \xi_1 + \xi_2 + i(\gamma_1 + \gamma_2), z + \xi_1 + i\gamma_1, z) R_3(\xi + i\gamma) \\ -\gamma_1, -\gamma_2 \in V^+$$

Nun gilt:

$$G(\gamma) = G(\gamma_{(0,1)}) \quad \text{falls } \gamma_1 = 0, \gamma_2 \in V^+$$

$$G(\gamma_{(0,1)}) = G(\gamma_{(0,1)(1,2)}) \quad \text{falls } -\gamma_1 \in V^+, \gamma_1 + \gamma_2 = 0$$

$$G(\gamma_{(0,1)(1,2)}) = G(\gamma_{(0,1)(1,2)(0,1)}) \quad \text{falls } -\gamma_1 \in V^+, \gamma_2 = 0$$

und daraus folgt die Behauptung

$$G(Q) = G(Q_{(0,1)}) = G(Q_{(0,1)(1,2)}) = G(Q_{(0,1)(1,2)(0,1)})$$

### Folgerungen aus Satz (II.3)

1) Man betrachte das Matricelement

$$(\Omega, A(z_0)A(z_1) + (z_1 - z_0)A(z_2)A(z_3) + (z_3 - z_2) \cdots A(z_{2n-2})A(z_{2n-1}) + (z_{2n-1} - z_{2n-2})\Omega) \\ = \omega_{2n}(\underline{z}) + (z_1 - z_0) + (z_3 - z_2) \cdots + (z_{2n-1} - z_{2n-2}) \\ = \omega_{2n}(\underline{z}) + (\xi_1) \cdot + (\xi_3) \cdots + (\xi_{2n-1}) \\ = F_{2n}(\underline{z}) \prod_{i < j} \bar{\tau}^{-1}(\xi_i + \cdots + \xi_j) \cdot \bar{\tau}^{-1}(\xi_2) \cdot \bar{\tau}^{-1}(\xi_4) \cdots \bar{\tau}^{-1}(\xi_{2n-2})$$

Dieses besitzt nun holomorphe Fortsetzungen zu  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n-1} \in \mathcal{U}_{\neq(0)}$  und  $\xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{2n-2} \in \mathcal{U}^+$ , denn die möglichen Pole des Ausdrucks  $\prod_{i \leq j} \tilde{r}'(\xi_i + \dots + \xi_j) \tilde{r}'(\xi_2) \dots \tilde{r}'(\xi_{2n-2})$  werden durch Nullstellen von  $F_{2n}(\xi)$  kompensiert.

2) Ein anderes Beispiel ist

$$\mathcal{W}_{n+1}(\underline{z}) + (z_j - z_{j-1}) + (z_{j+1} - z_j) + (z_{j+1} - z_{j-1}) = \mathcal{W}_{n+1}(\xi) + (\xi_j) + (\xi_{j+1}) + (\xi_j + \xi_{j+1})$$

Diese Funktion kann nun holomorph zu  $\xi_j = \xi_{j+1} = 0$  und

$\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n \in \mathcal{U}^+$  fortgesetzt werden. Dies bedeutet:

Nach Multiplikation mit  $\tilde{r}(z_j - z_{j-1}) \cdot \tilde{r}(z_{j+1} - z_j) + (z_{j+1} - z_{j-1})$  kann man die Argumente der Feldoperatoren  $A(z_{j-1})A(z_j)A(z_{j+1})$  in allen n-Punkt-Funktionen beliebig zusammenrücken lassen.

Analoges gilt für Produkte von vier und mehr Feldoperatoren oder auch für mehrere Cluster von Produkten von Feldoperatoren innerhalb der Wightmanfunktionen.

3) Darstellung der n-Punkt-Funktionen:

Für die n-Punkt-Funktion kann man schreiben

$$\mathcal{W}_{n+1}(\xi) = F_{n+1}(\xi) \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \tilde{r}'(\xi_i + \dots + \xi_j), \quad \xi \in \bigcup_{\pi \in \mathcal{S}_{n+1}} \tau_{\pi}^{-1} \pi$$

Die Singularitäten von  $\mathcal{W}_{n+1}(\xi)$  sind - da  $F_{n+1}(\xi)$  holomorph für  $\xi = 0$  ist - nie stärker als die des Produktes  $\prod_{i \leq j} \tilde{r}'(\xi_i + \dots + \xi_j)$ .

Nach Satz (II.2) kann  $r(\xi)$  durch  $\mathcal{W}_2^{-1}(\xi)$  in einer genügend kleinen Umgebung  $V(0)$  ersetzt werden. Definiert man

$G_{n+1}(\xi) := \mathcal{W}_{n+1}(\xi) \cdot \prod_{i \leq j} \mathcal{W}_2^{-1}(\xi_i + \dots + \xi_j)$ , so ist  $G_{n+1}(\xi)$  ebenfalls holomorph im Punkt  $\xi = 0$ . Damit erhält man in einer hinreichend kleinen Nullumgebung folgende Darstellung der n-Punkt-Funktion:

$$\mathcal{W}_{n+1}(\xi) = G_{n+1}(\xi) \prod_{i \leq j} \mathcal{W}_2(\xi_i + \dots + \xi_j), \quad \xi \in \mathcal{U}^+$$

oder auf die Variablen  $\underline{z}$  umgeschrieben

$$\mathcal{W}_{n+1}(\underline{z}) = \mathcal{G}_{n+1}(\underline{z}) \prod_{0 \leq i < j \leq n} \mathcal{W}_2(z_i, z_j)$$

Die Stärke der Singularitäten wird daher durch das Produkt  $\prod_{0 \leq i < j \leq n} \mathcal{W}_2(z_j - z_i)$  dominiert.

Obwohl (A 2) nur eine Annahme über die Singularität der Vierpunktfunktion  $\mathcal{W}_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  im Argument  $\xi_3$  ist, erhält man daraus eine Aussage über die Stärke der möglichen Singularitäten aller n-Punkt-Funktionen.

## II.5 Operatorprodukte

Bisher wurden alle Aussagen für die Wightmanfunktionen formuliert. Hier soll es nun darum gehen, Operatorprodukte zu definieren und Aussagen über deren Definitionsbereich und analytisches Verhalten - entweder als Sesquilinearformen oder als Operatoren aufgefaßt - zu gewinnen.

Für die Definition von  $J$ ,  $J_z$  und  $J_n$ ,  $J_{n,z}$  sei auf Abschnitt I.1 verwiesen. Ferner werden folgende Räume benötigt:

$$J^{(m)} := L\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} J_m\right) \quad \text{und} \quad J_z^{(m)} := L\left(\bigcup_{m=0}^{\infty} J_{m,z}\right)$$

Damit erhält man  $J^{(0)} \subset J^{(1)} \subset \dots$  und  $J^{(m)} \subset J$  für alle  $m$ .

Satz (II.4): Zu  $n = 0, 1, 2, \dots$  gibt es reelle Umgebungen  $U_r^{(n)}(x)$ , so daß  $A(x_1) \dots A(x_l) \prod_{1 \leq i < j \leq l} r(x_j - x_i)$  als Sesquilinearform auf  $J \times J_r^{(n)}$

existiert und holomorph für  $x_1, \dots, x_l \in U_r^{(n)}(x)$  ist.

Bemerkung 1: Gibt es eine universelle Umgebung  $U_r(x) = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_r^{(n)}(x)$ , so kann  $J^{(n)}$  durch  $J$  ersetzt werden. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn in (A 1) und (A 2)  $U_r(0) = \mathbb{R}^4$  gefordert wird. Man beachte ferner, daß es zu jedem  $\phi \in J$  ein  $n$  gibt mit  $\phi \in J^{(n)}$ . Auf Grund dessen werden später die Umgebungen  $U_r^{(n)}(x)$  nicht mehr einzeln aufgeführt, denn je nach dem auf welchen Zustand  $\phi$  der Operator angewandt wird, ist klar, welche Umgebung  $U_r^{(n)}(x)$  gemeint ist.

Bemerkung 2: Schreibt man  $x_1 = x + \Delta_1, \dots, x_l = x + \Delta_l$ , so bedeutet für  $x \in \mathbb{R}^4$   $x_1, \dots, x_l \in U_r(x)$  nichts anderes als  $\Delta_1, \dots, \Delta_l \in U_r(0)$  und  $U_r(x) = \{x\} + U_r(0)$ .

Also:  $A(x_1) \dots A(x_l) \prod_{1 \leq i < j \leq l} r(x_j - x_i) = A(x + \Delta_1) \dots A(x + \Delta_l) \prod_{1 \leq i < j \leq l} r(\Delta_j - \Delta_i)$  ist holomorph in  $\Delta_1, \dots, \Delta_l$  für  $\Delta_1, \dots, \Delta_l \in U_r(0)$ ,  $x \in \mathbb{R}^4$ .

Beweis: Es genügt dies für spezielle Zustände

$A(z_1') \dots A(z_m') \Omega \otimes A(z_1'') \dots A(z_m'') \Omega \in J \times J$  zu zeigen, da jeder Ausdruck  $\phi \otimes \psi \in J \times J$  eine Linearkombination solcher Zustände ist.

$$\begin{aligned} & A(x_1) \dots A(x_l) \prod_{i < j} r(x_j - x_i) (\phi_m(z_1', \dots, z_m') \otimes \phi_m(z_1'', \dots, z_m'')) \\ & := (\Omega, A(\bar{z}_m') \dots A(\bar{z}_1') A(x_1) \dots A(x_l) A(z_1'') \dots A(z_m'') \Omega) \prod_{i < j} r(x_j - x_i) \end{aligned}$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit

$$S(\bar{z}_m', \dots, \bar{z}_1', x_1, \dots, x_\ell, z_1'', \dots, z_m'') \\ = \prod_{i=1}^{\ell} \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^n \tau(x_i - \bar{z}_j') \tau(z_k'' - x_i) \tau(z_k'' - \bar{z}_j') \prod_{1 \leq i < j \leq m} \tau(\bar{z}_i' - \bar{z}_j') \prod_{1 \leq i < j \leq m} \tau(z_i'' - z_j'') ,$$

so erhält man die Funktion  $F_{\ell+m+n}(\bar{z}_m', \dots, \bar{z}_1', x_1, \dots, x_\ell, z_1'', \dots, z_m'')$

Diese Funktion ist holomorph für  $x_1, \dots, x_\ell \in U_r(x)$  bei festgehaltenen Argumenten  $\bar{z}_m', \dots, \bar{z}_1', z_1'', \dots, z_m''$ . Für  $x_1, \dots, x_\ell \in U_r(x)$  ist jedoch  $S(\bar{z}_m', \dots, \bar{z}_1', x_1, \dots, x_\ell, z_1'', \dots, z_m'')$  eine holomorphe Funktion und daher kann man  $F_{\ell+m+n}$  durch  $S$  dividieren und erhält die Aussage des Satzes (II.4).

Nachfolgend wird eine Operatorversion dieses Satzes angegeben.

Satz (II.5): Für  $z \in \tau^+$  und für  $n = 0, 1, 2, \dots$  gibt es reelle Umgebungen  $U_r^{(n)}(z)$ , so daß  $A(z_1) \dots A(z_\ell) \prod_{i=1}^{\ell} r(z_j - z_i)$  als Operator auf  $J_z^{(n)}$  existiert und holomorph für  $z_1, \dots, z_\ell \in U_r^{(n)}(z)$  ist.

Beweis:

(a) Wegen der Struktur des Raumes  $J_z$  genügt es, die Behauptung für spezielle Jostzustände  $A(z_1') \dots A(z_m') \Omega \in J_z$  zu zeigen.

(b) Schreibt man den Vektor

$$A(z_1) \dots A(z_\ell) \prod_{i < j} \tau(z_j - z_i) A(z_1') \dots A(z_m') \Omega \\ \text{einmal in der Form} \\ A(z + \xi_1) A(z + \xi_1 + \xi_2) \dots A(z + \xi_1 + \dots + \xi_\ell) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq \ell}} \tau(\xi_i + \dots + \xi_j) A(z_1') \dots A(z_m') \Omega \\ \text{so ist dieser holomorph in } \xi_1, \dots, \xi_\ell \text{ falls } \xi_1, \dots, \xi_\ell \in \tau^+ \\ \text{und } z_1' - z - \xi_1 - \dots - \xi_\ell \in \tau^+$$

Schreibt man ihn jedoch als

$$A(z + \xi_1 + \dots + \xi_\ell) \dots A(z + \xi_1) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq \ell}} \tau(\xi_i + \dots + \xi_j) A(z_1') \dots A(z_m') \Omega \\ \text{so ist das Holomorphiegebiet } \xi_1, \dots, \xi_\ell \in \tau^-, z + \xi_1 + \dots + \xi_\ell \in \tau^+$$

(c) Aus Satz (II.3) lernt man - mit einer analogen Beweisführung wie bei Satz (II.4) - daß das Matricelement

$$(\Omega, A(\bar{z}_m') \dots A(\bar{z}_1') A(\bar{z}_\ell) \dots A(\bar{z}_1) \prod_{i < j} \tau(\bar{z}_i - \bar{z}_j) \\ \times A(z_1) \dots A(z_\ell) \prod_{i < j} \tau(z_j - z_i) A(z_1') \dots A(z_m') \Omega)$$

holomorph in  $\bar{z}_1 \dots \bar{z}_1$  für  $\bar{z}_1 \dots \bar{z}_1 \in U(\bar{z})$  und in  $z_1, \dots, z_1$  für  $z_1 \dots z_1 \in U(z)$  ist. (Hierbei wird  $\bar{z}_1$  als unabhängige Variable aufgefaßt!)

Deshalb existieren die beiden Randwerte

$$A(z + \xi_1 + i0) \dots A(z + \xi_1 + \dots + \xi_\ell + i0) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(\xi_i + \dots + \xi_j \cdot i0) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega$$

beziehungsweise  $A(z + \xi_1 + \dots + \xi_\ell - i0) \dots \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(\xi_i + \dots + \xi_j - i0) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega$  und sind gleich.

(d) Nach dem Edge of the Wedge Theorem gilt daher für alle  $\Psi \in \mathcal{H}$   $(\Psi, A(z_1) \dots A(z_1) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(z_j - z_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega)$  ist holomorph für  $z_1, \dots, z_1 \in U(z)$ ,  $z \in \mathcal{T}^+$ .

Dies hat zur Folge, daß  $A(z_1) \dots A(z_1) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(z_j - z_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega$  eine vektorwertige holomorphe Funktion in  $z_1, \dots, z_1$  ist, falls  $z_1, \dots, z_1 \in U(z)$  w.z.z.w.

Bemerkung 3: Nun soll der Definitionsbereich von  $A(x_1) \dots A(x_1) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(x_j - x_i)$  als Sesquilinearform beziehungsweise von  $A(z_1) \dots A(z_1) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(z_j - z_i)$  als Operator erweitert werden. Wegen Satz (II.3) sieht man leicht ein, daß zum Beispiel auch  $\Psi = \phi_m(z'_1 \dots z'_m) r(z'_2 - z'_1)$  für  $z'_1 \in \mathcal{T}^+$ ,  $z'_2 - z'_1 \in U(0)$   $z'_3 - z'_1, \dots, z'_m - z'_{m-1} \in \mathcal{T}^+$ , falls nur  $U(0)$  hinreichend klein ist, im Definitionsbereich von  $A(x_1) \dots A(x_1) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(x_j - x_i)$  liegt. Gilt zusätzlich noch  $z'_1 - z \in \mathcal{T}^+$ , so ist auch  $A(z_1) \dots A(z_1) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(z_j - z_i)$  auf  $\Psi$  definiert. (Eventuell muß  $U(0)$  noch weiter verkleinert werden. Ähnliches gilt für  $\phi_m(z'_1 \dots z'_m) r(z'_j - z'_{j-1})$ ,  $\phi_{2m}(z'_1, \dots, z'_{2m}) r(z'_2 - z'_1) r(z'_4 - z'_2) \dots r(z'_{2m} - z'_{2m-1})$  oder  $\phi_m(z'_1, \dots, z'_m) \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} r(z'_j - z'_i)$ . Definiert man also

$$B(z; \xi) := A(z) A(z + \xi) \cdot (\xi), \quad C(z; \xi_1, \xi_2) := A(z) A(z + \xi_1) A(z + \xi_1 + \xi_2) + (\xi_1) \cdot (\xi_2) + (\xi_1 + \xi_2) \cdot (\xi_1)$$

$$D(z; \xi_1, \xi_2, \xi_3) := A(z) A(z + \xi_1) A(z + \xi_1 + \xi_2) A(z + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \prod_{1 \leq i < j \leq 3} r(\xi_i + \dots + \xi_j), \text{ usw.}$$

so können in den Vektoren  $A(z_1) \dots A(z_m) \Omega$  beliebig viele dieser  $A(z_j)$  durch  $B(z_j; \xi)$ ,  $C(z_j; \xi_1, \xi_2)$ ,  $D(z_j; \xi_1, \xi_2, \xi_3) \dots$  ersetzt werden. Die neu auftretenden Argumente  $\xi_i$  liegen in Umgebungen  $U(0)$ , wobei  $U(0)$  von dem vorausgehenden  $z_{j-1}$  und dem nachfolgenden  $z_{j+1}$  abhängt. Damit erhält man als erweiterten Definitionsbereich

$$\mathcal{J} := L \left( \left\{ A(z_1) \dots A(z_m) \Omega, A(z_1) \dots B(z_j; \xi) \dots A(z_m) \Omega, A(z_1) \dots C(z_j; \xi_1, \xi_2) \dots A(z_m) \Omega, \text{ usw} \right\} \right)$$

$$A(z_1) \dots B(z_i; \{^{(i)}\}) \dots B(z_j; \{^{(j)}\}) \dots A(z_m) \Omega,$$

$$A(z_1) \dots C(z_i; \{^{(i)}_1, \{^{(i)}_2\}) \dots C(z_j; \{^{(j)}_1, \{^{(j)}_2\}) \dots A(z_m) \Omega, \text{ usw}$$

$$\dots B(z_1; \{^{(1)}_1\}) B(z_2; \{^{(2)}_2\}) \dots B(z_m; \{^{(m)}_m\}) \Omega, \dots \}$$

mit den üblichen Einschränkungen an die auftretenden Argumente  $z_i, \{^{(i)}_i$ . Analog wird  $\hat{J}_z$  für  $z \in \mathcal{T}^+$  definiert.

Die Sätze (II.4) und (II.5) und die noch zu formulierenden Sätze (II.6) und (II.7) können nun dahingehend erweitert werden, daß  $J$  und  $J_z$  durch  $\hat{J}$  und  $\hat{J}_z$  ersetzt werden.

Was kann man nun über den Randwert

$$\lim_{V^+ \ni y \rightarrow \emptyset} A(z + \Delta_1) \dots A(z + \Delta_\ell) \prod_{i=1}^{\ell} r(\Delta_i - \Delta_i), z = x + iy, \text{ als Operator aussagen?}$$

Satz (II.6):  $A(x + \Delta_1) \dots A(x + \Delta_\ell) \prod_{i=1}^{\ell} r(\Delta_i - \Delta_i)$  für  $\Delta_1, \dots, \Delta_\ell \in U_r(0)$

existiert als operatorwertige Distribution (in  $x$ ) über  $\mathcal{D}(\{x_0\} + V_r(0))$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^h$ , mit Definitionsbereich  $J$  und ist unendlich oft differenzierbar in den Relativkoordinaten  $\Delta_1, \dots, \Delta_\ell$ .  $U_r(0)$  und  $V_r(0)$  hängen von dem Zustand  $\psi \in J$  ab.

Bemerkung 4: Sei  $\psi \in J$  und  $g \in \mathcal{D}(\{x_0\} + V_r(0))$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^h$ , so ist

$\int dx g(x) A(x + \Delta_1) \dots A(x + \Delta_\ell) \prod_{i=1}^{\ell} r(\Delta_i - \Delta_i) \psi$  ein Vektor aus  $\mathcal{H}$ , der für  $\Delta_1, \dots, \Delta_\ell \in U_r(0)$  unendlich oft differenzierbar in  $\Delta_1, \dots, \Delta_\ell$  ist.

Der Beweis des Satzes (II.6) erfolgt in mehreren Schritten, die als Hilfssätze formuliert werden.

Hilfssatz 1: Für  $\Delta_1, \dots, \Delta_\ell \in U_r(0)$  existiert  $A(x + \Delta_1) \dots A(x + \Delta_\ell) \prod_{i=1}^{\ell} r(\Delta_i - \Delta_i)$  als operatorwertige Distribution über  $\mathcal{D}(\{x_0\} + V_r(0))$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^h$  mit Definitionsbereich  $J$ .

Beweis:

(a) Es genügt wieder dies für Vektoren  $A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega \in J$  zu zeigen.

Sei  $A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega \in J$ , so ist  $z'_1 = x'_1 + iy'_1 \in \mathcal{T}^+$ .

Für  $y' = \frac{1}{2} y'_1$  liegt daher  $A(z'_1) \dots A(z'_m)$  in  $J_{iy'}$ .

Nun gibt es  $y \in V^+$  mit  $y' - y \in V^+$  (etwa  $y = 1/2 y'$ )

Nach Satz (II.5) ist

$A(x + iy + \Delta_1) \dots A(x + iy + \Delta_L) \prod_{i,j} (\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega$  ein Vektor aus  $\mathcal{H}$ , der holomorph von  $\Delta_1, \dots, \Delta_L \in \mathcal{U}_+(0)$  abhängt.

- (b) Wie wächst nun  $\| A(x + iy + \Delta_1) \dots A(x + iy + \Delta_L) \prod_{i,j} (\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega \|$  im Limes gegen  $y \in V^+$  gegen 0 an? Dazu wird folgendes Matrixelement betrachtet:

$$\begin{aligned} & (\Omega, A(\bar{z}'_m) \dots A(\bar{z}'_1) A(\hat{x} - i\hat{y} + \hat{\Delta}_L) \dots A(\hat{x} - i\hat{y} + \hat{\Delta}_1) \prod_{i,j} (\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \\ & \quad \times A(x + iy + \Delta_1) \dots A(x + iy + \Delta_L) \prod_{i,j} (\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega) \\ & = \left\{ (\Omega, A(\bar{z}'_m) \dots A(\bar{z}'_1) A(\hat{x} - i\hat{y} + \hat{\Delta}_L) \dots A(\hat{x} - i\hat{y} + \hat{\Delta}_1) \prod_{i,j} (\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \prod_{i,j} (\Delta_j - \Delta_i) \right. \\ & \quad \times A(x + iy + \Delta_1) \dots A(x + iy + \Delta_L) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega) \prod_{i,j} (x - \hat{x} + i(y + \hat{y}) + \Delta_j - \hat{\Delta}_i) \left. \right\} \\ & \quad \prod_{i,j} \tilde{r}^{-1}(x - \hat{x} + i(y + \hat{y}) + \Delta_j - \hat{\Delta}_i) \end{aligned}$$

Der Term in der geschweiften Klammer besitzt nach Satz (II.4) einen Grenzwert für  $\hat{y}$ ,  $y \rightarrow 0$ , falls nur alle Realteile wie  $\Delta_j - \Delta_i$ ,  $\hat{\Delta}_j - \Delta_i$  und  $x - \hat{x} + \Delta_j - \hat{\Delta}_i$  in einer genügend kleinen Umgebung der 0 liegen.

Dies ist natürlich erfüllt, falls  $\hat{x}$ ,  $x \in \{x_0\} + V_+(0)$  und  $\hat{\Delta}_i, \Delta_j \in \mathcal{U}_+(0)$ , wobei diese reellen Nullumgebungen geeignet gewählt sind.

Der Ausdruck  $\prod_{i,j} \tilde{r}^{-1}(x - \hat{x} + i(y + \hat{y}) + \Delta_j - \hat{\Delta}_i)$  bestimmt daher die Wachstumsseigenschaften für  $y + \hat{y} \rightarrow 0$ . Nun ist  $\tilde{r}(\xi) = F_2(\xi) W_2(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{U}_+(0)$  und  $F_2(0) = 1$ . Aus diesem Grunde ist

$$\prod_{i,j} \tilde{r}^{-1}(x - \hat{x} + i(y + \hat{y}) + \Delta_j - \hat{\Delta}_i) \quad \text{eine Distribution in } x \text{ und } \hat{x} \text{ über}$$

$$\mathcal{D}(\{x_0\} + V_+(0) \times \{x_0\} + V_+(0))$$

- (c) Hiermit erhält man:

Für  $g \in \mathcal{D}(\{x_0\} + V_+(0))$  definiert  $\int dx g(x) A(x + \Delta_1) \dots A(x + \Delta_L) \prod_{i,j} (\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega$  einen Zustand im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ .

Daraus folgt Hilfssatz 1.

Hilfssatz 2: Sei  $D^\alpha$  ein Differentialoperator der Ordnung  $N$  nach den Komponenten von  $\Delta_1, \dots, \Delta_1$ . Der Randwert

$\lim_{V^* \ni y \rightarrow 0} D^\alpha \left( A(x+iy+\Delta_1) \dots A(x+iy+\Delta_L) \prod_{i \in J} r(\Delta_j - \Delta_i) \right)$  ist eine operatorwertige Distribution (in  $x$ ) über  $\mathcal{D}(\{x_0\} + V_r(0))$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^r$  mit Definitionsbereich  $J$ .

Beweis:

(a) Wie beim Beweis von Hilfssatz 1 gibt es  $y \in V^+$ , so daß

$D^\alpha A(x+iy+\Delta_1) \dots A(x+iy+\Delta_L) \prod_{i \in J} r(\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega$  ein Vektor aus  $\mathcal{H}$  ist, der holomorph in  $\Delta_1, \dots, \Delta_1 \in U_r(0)$  ist.

(b) Die Wachstumseigenschaften werden bestimmt durch

$$\begin{aligned} & (\Omega, A(\bar{z}'_m) \dots A(\bar{z}'_1) \hat{D}^\alpha A(\hat{x}-iy+\hat{\Delta}_L) \dots A(\hat{x}-iy+\hat{\Delta}_1) \prod_{i \in J} r(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \\ & \quad \times D^\alpha A(x+iy+\Delta_1) \dots A(x+iy+\Delta_L) \prod_{i \in J} r(\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega) \\ &= \hat{D}^\alpha D^\alpha \left\{ (\Omega, A(\bar{z}'_m) \dots A(\bar{z}'_1) A(\hat{x}-iy+\hat{\Delta}_L) \dots A(\hat{x}-iy+\hat{\Delta}_1) \prod_{i \in J} r(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \right. \\ & \quad \times A(x+iy+\Delta_1) \dots A(x+iy+\Delta_L) \prod_{i \in J} r(\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega) \\ & \quad \left. \cdot \prod_{i \in J} r(x-\hat{x}+i(y+\hat{y})+\Delta_j - \hat{\Delta}_i) \prod_{i \in J} \bar{r}'(x-\hat{x}+i(y+\hat{y})+\Delta_j - \hat{\Delta}_i) \right\} \end{aligned}$$

Sei  $D^\alpha = \partial_1 \dots \partial_\alpha$  und damit  $\hat{D}^\alpha = \hat{\partial}_1 \dots \hat{\partial}_\alpha$ , so kann dies in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\pi, \sigma \in \mathcal{S}_\alpha} \sum_{b, k=0}^\alpha \frac{1}{k!} \frac{1}{(\alpha-k)!} \frac{1}{k!} \frac{1}{(\alpha-k)!} \left[ \hat{\partial}_{\pi(\alpha)} \dots \hat{\partial}_{\pi(k)} \partial_{\sigma(1)} \dots \partial_{\sigma(k)} \prod_{i \in J} \bar{r}'(x-\hat{x}+i(y+\hat{y})+\Delta_j - \hat{\Delta}_i) \right] \\ & \quad \times \left\{ \hat{\partial}_{\pi(k+1)} \dots \hat{\partial}_{\pi(\alpha)} \partial_{\sigma(1)} \dots \partial_{\sigma(\alpha)} (\Omega, A(\bar{z}'_m) \dots A(\bar{z}'_1) A(x-iy+\hat{\Delta}_L) \dots \prod_{i \in J} r(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \right. \\ & \quad \left. A(x+iy+\Delta_1) \dots \prod_{i \in J} r(\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega) \prod_{i \in J} \bar{r}'(x-\hat{x}+i(y+\hat{y})+\Delta_j - \hat{\Delta}_i) \right\} \end{aligned}$$

Für  $y, \hat{y} \rightarrow 0$  sind die Ausdrücke in eckiger Klammer lokal temperierte Distributionen und die innerhalb der geschweiften Klammer besitzen einen endlichen Grenzwert. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Zu zeigen bleibt noch die Vertauschbarkeit von Randwertbildung und Differentiation nach Ausschmieren durch eine Testfunktion.

Hilfssatz 3: Sei  $g \in \mathcal{D}(\{x_0\} + V_+(0))$  und  $D^\alpha$  ein Differentialoperator nach den Komponenten von  $\Delta_1, \dots, \Delta_\ell$ . Für  $\psi \in \mathcal{J}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \lim_{V^+ \ni y \rightarrow 0} \int dx g(x) D^\alpha A(x+iy+\Delta_1) \dots A(x+iy+\Delta_\ell) \prod_{i < j} (\Delta_j - \Delta_i) \psi \\ &= D^\alpha \lim_{V^+ \ni y \rightarrow 0} \int dx g(x) A(x+iy+\Delta_1) \dots A(x+iy+\Delta_\ell) \prod_{i < j} (\Delta_j - \Delta_i) \psi \end{aligned}$$

Beweis: Wie im Anhang A gezeigt ist, folgt dies aus den in Hilfssatz 1 und 2 bewiesenen Eigenschaften des Matricelementes

$$\begin{aligned} & \iint d\hat{x} d\hat{y} \bar{g}(\hat{x}) g(\hat{y}) (\Omega, A(\hat{z}'_m) \dots A(\hat{z}'_1) A(\hat{x}-i\hat{y}+\hat{\Delta}_\ell) \dots A(\hat{x}-i\hat{y}-\hat{\Delta}_1) \prod_{i < j} (\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \\ & \quad \times A(x+iy+\Delta_1) \dots A(x+iy+\Delta_\ell) \prod_{i < j} (\Delta_j - \Delta_i) A(z'_1) \dots A(z'_m) \Omega) \end{aligned}$$

Die drei Hilfssätze zusammen ergeben Satz (II.6).

Bemerkung 5: Der Operator

$\int dx g(x) A(x+\Delta_1) \dots A(x+\Delta_\ell) \prod_{i < j} (\Delta_j - \Delta_i)$  angewandt auf Zustände  $\psi \in \mathcal{J}$  ist zwar unendlich oft differenzierbar in  $\Delta_1, \dots, \Delta_\ell$  aber im allgemeinen nicht holomorph, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

Sei  $A(x) = \varphi(x)$ ,  $\Box \varphi(x) = 0$  das freie Feld zur Masse Null.

Als Operatorprodukt wird  $\int dx g(x) A(x) A(x+\xi) \sim(\xi)$  gewählt und auf den Vakuumzustand  $\Omega$  angewendet.

Annahme:  $\int dx g(x) A(x) A(x+\xi) \sim(\xi) \Omega$  ist holomorph für  $\xi \in U_+(0)$ .  
 Es gibt komplexe Umgebung  $U(0)$  von  $0 \in \mathbb{C}^4$ , so daß  $\int dx g(x) A(x) A(x+\xi) \sim(\xi) \Omega$  holomorph für  $\xi \in U(0)$  ist. Also ist für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  das Matricelement  $(\psi, \int dx g(x) A(x) A(x+\xi) \sim(\xi) \Omega)$  holomorph für  $\xi \in U(0)$ . Wähle  $\xi_0 \in U(0) \cap \mathbb{R}^-$  und  $\psi = \phi_2(z_1, z_2)$  mit  $z_1 = \bar{\xi}_0$ ,  $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}^+$ .

$$\begin{aligned} & (\Phi_2(z_1, z_2), \int dx g(x) \overline{H}(x) \overline{H}(x+\xi) + (\xi)) = \int dx g(x) \omega_4(\bar{z}_2, \bar{z}_1, x, x+\xi) + (\xi) \\ & = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int g(x) \left\{ \frac{1}{(\xi_0 - \bar{z}_2)^2} + \frac{\xi^2}{(x - \bar{z}_2)^2 (x + \xi - \xi_0)^2} + \frac{\xi^2}{(x - \xi_0)^2 (x + \xi - \bar{z}_2)^2} \right\} dx =: F(\xi) \end{aligned}$$

Behauptung:  $F(\xi)$  nicht holomorph im Punkt  $\xi_0$

Beweis:

$$\begin{aligned} F(\xi_0 + i0) - F(\xi_0 - i0) &:= \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ F(\xi_0 + i\eta) - F(\xi_0 - i\eta) \} \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int g(x) \frac{1}{(x - \bar{z}_2)^2} \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \frac{(\xi_0 + i\eta)^2}{(x + i\eta)^2} - \frac{(\xi_0 - i\eta)^2}{(x - i\eta)^2} \right\} dx \end{aligned}$$

(die Differenz der beiden anderen Terme verschwindet !)

$$= \int_0^2 \int g(x) \frac{-1}{(x - \bar{z}_2)^2} \frac{i}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(x^2) dx \neq 0$$

bei geeignet gewähltem  $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$

W. z. z. W.

Abschließend wird noch die Lokalität der nach Satz (II.6) existierenden Operatorprodukte gezeigt.

Satz (II.7): (Lokalität der Operatorprodukte)

Für  $\Phi, \Psi \in \mathcal{J}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \left( \int dx f(x) \hat{D}^{\alpha} A(x + \Delta_1) \dots A(x + \Delta_k) \overline{\Pi}(\Delta_j - \Delta_i) \Phi, \int dx g(\hat{x}) \hat{D}^{\beta} A(\hat{x} + \hat{\Delta}_1) \dots A(\hat{x} + \hat{\Delta}_\ell) \overline{\Pi}(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \Psi \right) \\ &= \left( \int dx g(\hat{x}) \hat{D}^{\beta} A(\hat{x} + \hat{\Delta}_1) \dots A(\hat{x} + \hat{\Delta}_\ell) \overline{\Pi}(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \Phi, \int dx f(x) \hat{D}^{\alpha} A(x + \Delta_1) \dots A(x + \Delta_k) \overline{\Pi}(\Delta_j - \Delta_i) \Psi \right) \end{aligned}$$

falls Träger  $f$  und Träger  $g$  raumartig zueinander liegen. Zudem muß

$T \upharpoonright f \cup T \upharpoonright g \subset \{x_0\} \cup V_r(0)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^4$  gelten, und die Nebenbedingungen des Satzes (II.6) müssen für alle  $\Delta_1, \dots, \Delta_k \in U_r(0)$  und  $\hat{\Delta}_1, \dots, \hat{\Delta}_\ell \in \hat{U}_r(0)$  erfüllt sein.

Bemerkung 6: Hier ist die Lokalität im schwachen Sinne formuliert. Es ist aber ebenso gut möglich die Lokalität im starken Sinne auf dem Raum  $\mathcal{J}$  zu zeigen.

Beweis: Zur Vereinfachung sind die Differentialoperatoren  $D^\alpha$  und  $\hat{D}^\beta$  weggelassen, sie machen den Beweis nur unnötig kompliziert.

$$\int dx f(x) A(x+\Delta_1) \dots A(x+\Delta_k) \prod_{i < j} \tau(\Delta_j - \Delta_i) \phi$$

$$= \lim_{V \ni \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \gamma_{k-1} \rightarrow 0} \int dx f(x) A(x+\Delta_1+i\gamma_1) \dots A(x+\Delta_k+i\gamma_k) \prod_{i < j} \tau(\Delta_j - \Delta_i + i(\gamma_j - \gamma_i)) \phi$$

Die anderen drei Vektoren sind ähnlich definiert. Damit erhält man

$$\begin{aligned} & (\int dx f(x) A(x+\Delta_1) \dots A(x+\Delta_k) \prod_{i < j} \tau(\Delta_j - \Delta_i) \phi, \int d\hat{x} g(\hat{x}) A(\hat{x}+\hat{\Delta}_1) \dots A(\hat{x}+\hat{\Delta}_l) \prod_{i < j} \tau(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \psi) \\ & - (\int d\hat{x} g(\hat{x}) A(\hat{x}+\hat{\Delta}_1) \dots A(\hat{x}+\hat{\Delta}_l) \prod_{i < j} \tau(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \phi, \int dx f(x) A(x+\Delta_1) \dots A(x+\Delta_k) \prod_{i < j} \tau(\Delta_j - \Delta_i) \psi) \end{aligned}$$

$$= \iint dx d\hat{x} f(x) g(\hat{x}) \lim_{V \ni \gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k-1} \rightarrow 0} \lim_{V \ni \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_l, \hat{\gamma}_{l-1} \rightarrow 0}$$

$$\begin{aligned} & \{ (\phi, A(x+\Delta_k-i\gamma_k) \dots A(x+\Delta_1-i\gamma_1) A(\hat{x}+\hat{\Delta}_1+i\hat{\gamma}_1) \dots A(\hat{x}+\hat{\Delta}_l+i\hat{\gamma}_l) \psi) \\ & - (\phi, A(\hat{x}+\hat{\Delta}_l-i\hat{\gamma}_l) \dots A(\hat{x}+\hat{\Delta}_1-i\hat{\gamma}_1) A(x+\Delta_1+i\gamma_1) \dots A(x+\Delta_k+i\gamma_k) \psi) \} \\ & \times \prod_{i < j} \tau(\Delta_j - \Delta_i + i(\gamma_j - \gamma_i)) \prod_{i < j} \tau(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i + i(\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_i)) \end{aligned}$$

Erweitert man das erste Matrixelement mit  $\prod_{i < j} \tau(\hat{x} - x + \hat{\Delta}_j - \Delta_i + i(\hat{\gamma}_j + \gamma_i))$  und das zweite mit  $\prod_{i < j} \tau(x - \hat{x} + \Delta_i - \hat{\Delta}_j + i(\gamma_i + \hat{\gamma}_j))$  so sind beide Summanden analytisch in  $\Delta_1 \dots \Delta_k, \hat{\Delta}_1 \dots \hat{\Delta}_l$  nach Satz (II.4). Wegen der Permutationssymmetrie der Wightmanfunktionen im Analytizitätsbereich sind beide Randwerte gleich und daher gilt:

$$\begin{aligned} & = \iint dx d\hat{x} f(x) g(\hat{x}) (\phi, A(x+\Delta_k) \dots A(x+\Delta_1) A(\hat{x}+\hat{\Delta}_1) \dots A(\hat{x}+\hat{\Delta}_l) \psi) \\ & \quad \times \prod_{i < j} \tau(\Delta_j - \Delta_i) \prod_{i < j} \tau(\hat{\Delta}_j - \hat{\Delta}_i) \prod_{i < j} \tau(\hat{x} - x + \hat{\Delta}_j - \Delta_i) \\ & \quad \times \lim_{\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_{k-1} \rightarrow 0} \lim_{\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_l, \hat{\gamma}_{l-1} \rightarrow 0} \left\{ \prod_{i < j} \tau(\hat{x} - x + \hat{\Delta}_j - \Delta_i + i(\hat{\gamma}_j + \gamma_i)) - \prod_{i < j} \tau(x - \hat{x} + \Delta_i - \hat{\Delta}_j + i(\gamma_i + \hat{\gamma}_j)) \right\} \end{aligned}$$

Da die Träger von  $f$  und  $g$  raumartig liegen, die Umgebungen  $U_r(0)$ ,  $\hat{U}_r(0)$  und  $V_r(0)$  hinreichend klein sind, gilt:  $(\hat{x} - x + \Delta_j - \Delta_i)^2 < 0$ .

Beachtet man noch  $\tilde{r}'(\xi) = \frac{W_2(\xi)}{\xi^2}$ , so sind die beiden Randwerte gleich, da  $r^{-1}(\xi)$  holomorph für  $\xi^2 < 0$ ,  $\xi \in U(0)$  ist.

## II.6 Operatorproduktentwicklungen und zusammengesetzte Operatoren

In Abschnitt II.5 wurde gezeigt, daß die Annahmen (A) die Definition von Operatorprodukten beliebig vieler Feldoperatoren ermöglichen. Die Sätze (II.4) und (II.5) machen Aussagen über den Holomorphiebereich dieser Produkte und charakterisieren die zugehörigen dichten Teilräume des zu Grunde liegenden Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  auf denen sie - aufgefaßt als Sesquilinearformen beziehungsweise als Operatoren - definiert sind. Satz (II.6) sagt aus, daß diese Operatorprodukte nach Ausschmieren in der "Schwerpunktsvariablen" Randwerte besitzen, die nach Satz (II.7) lokale Operatoren sind.

Davon ausgehend sollen nun Operatorproduktentwicklungen angegeben werden.

### a) Produkt von zwei Feldoperatoren

$A(z) A(z+\xi) r(\xi)$  ist holomorph für  $\xi \in U_r(0)$  mit Definitionsbereich  $J_z$ .

(Wie schon erwähnt, kann  $U_r(0)$  von dem Zustand  $\psi \in J_z$  abhängen.) Daher gilt:

$$\begin{aligned} A(z) A(z+\xi) r(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_n} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu_n}} A(z) A(z+\xi) r(\xi) \Big|_{\xi=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_n} B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z) \end{aligned}$$

mit  $B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z) := \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu_n}} A(z) A(z+\xi) r(\xi) \Big|_{\xi=0}$

Die  $B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z)$  werden als zusammengesetzte Operatoren bezeichnet und sind auf  $J_z$  definiert.

Anders geschrieben:

$$A(z) A(z+\xi) = \frac{1}{r(\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_n} B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z),$$

dabei charakterisiert  $\frac{1}{r(\xi)} \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_n}$  den Singularitätsgrad der einzelnen Terme. Verwendet man zur Regularisierung das Inverse von  $W_2(\xi)$ , so erhält man:

$$A(z) A(z+\xi) = W_2(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_n} B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z).$$

b) Einige Folgerungen für die zusammengesetzten Operatoren  $B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z)$

- 1) Die  $B_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$  sind lokale operatorwertige Distributionen über  $\mathcal{D}(V_r(0))$  mit Definitionsbereich  $J$ .

Genauer:

Zu  $m = 0, 1 \dots$  gibt es eine Umgebung  $V_r^{(m)}(0)$  derart, daß für  $x \in \mathcal{D}(\{x_0\} + V_r^{(m)}(0))$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^4$ , der Operator  $\int dx g(x) B_{\mu_1 \dots \mu_m}(x)$  auf dem Raum  $\mathcal{F}^{(m)}$  definiert ist.

Angewandt auf  $\psi \in J$  konvergiert im allgemeinen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \dots \}^{\mu_1} \dots \{ \dots \}^{\mu_m} B_{\mu_1 \dots \mu_m}(g) \psi \quad \text{nicht mehr absolut.}$$

- 2) Für die Vakuum Erwartungswerte gilt:

$$(\Omega, B_{\mu_1 \dots \mu_m}(z) \Omega) = \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu_m}} W_2(\xi) + \{ \xi \} \Big|_{\xi=0}$$

Da  $r(\xi)$  minimal und normiert sein soll, ist weiter

$$(\Omega, B(z) \Omega) = 1. \quad \text{In der Entwicklung}$$

$$A(z) A(z+\xi) = \frac{1}{r(\xi)} \left\{ B(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \dots \}^{\mu_1} \dots \{ \dots \}^{\mu_m} B_{\mu_1 \dots \mu_m}(z) \right\}$$

hat daher der Operator, der zur stärksten Singularität gehört, einen nicht-verschwindenden Vakuum Erwartungswert.

- 3) Sind  $r_1(\xi)$  und  $r_2(\xi)$  zwei minimale und normierte regularisierende Funktionen, so gilt nach II.3  $r_2(\xi) = r_1(\xi) h(\xi)$ , wobei  $h(\xi)$  holomorph für  $\xi = 0$  und  $h(0) = 1$  ist. Beide regularisierende Funktionen geben Anlaß zu einer Operatorproduktentwicklung

$$A(z) A(z+\xi) r_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \dots \}^{\mu_1} \dots \{ \dots \}^{\mu_m} B_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(1)}(z)$$

$$A(z) A(z+\xi) r_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ \dots \}^{\mu_1} \dots \{ \dots \}^{\mu_m} B_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(2)}(z)$$

Wie hängen nun die Operatoren  $B_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(1)}(z)$  und  $B_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(2)}(z)$  zusammen?

Aus  $r_2(\xi) = r_1(\xi) h(\xi)$  folgt:

$$\begin{aligned} B_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(2)}(z) &= \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} A(z) A(z+\xi) r_2(\xi) \Big|_{\xi=0} \\ &= \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_m} A(z) A(z+\xi) r_1(\xi) h(\xi) \Big|_{\xi=0} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{1}{(m-k)!} \left\{ \partial_{\mu_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{\mu_{\sigma(k)}} A(z) A(z+\xi) \prod_{j=0}^{m-k} h_j(\xi) \right\} \\ \times \partial_{\mu_{\sigma(k+1)}} \cdots \partial_{\mu_{\sigma(m)}} h(\xi) \Big|_{\xi=0}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{1}{(m-k)!} B_{\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(k)}}^{(1)}(z) h_{\mu_{\sigma(k+1)} \cdots \mu_{\sigma(m)}}^{(0)}(0)$$

Ausgeschrieben für die niedrigsten Terme ergibt sich:

$$B^{(2)}(z) = B^{(1)}(z) \cdot h(0) = B^{(1)}(z)$$

$$B_{\mu}^{(2)}(z) = B_{\mu}^{(1)}(z) + h_{\mu}(0) B^{(1)}(z)$$

$$B_{\mu\nu}^{(2)}(z) = B_{\mu\nu}^{(1)}(z) + h_{\mu}(0) B_{\nu}^{(1)}(z) + B_{\mu}^{(1)}(z) h_{\nu}(0) + h_{\mu\nu}(0) B^{(1)}(z)$$

Die Transformation zwischen beiden Sätzen von Operatoren wird durch eine Dreiecksmatrix vermittelt, deren Elemente Taylorkoeffizienten von  $h(\xi)$  für den Entwicklungspunkt  $\xi = 0$  sind.

- c) In Abschnitt II.1 wurden Beispiele aufgeführt, die alle aus freien Feldern hergehen. Für diese Felder ist aber auch das Wickprodukt definiert. Was haben nun diese verschiedenen Operatorprodukte gemein?

- 1) Sei  $A(x) = \varphi(x)$ ,  $\square \varphi(x) = 0$  (freies, masseloses Feld)

$$\varphi(x) \varphi(y) = (\Omega, \varphi(x) \varphi(y) \Omega) + : \varphi(x) \varphi(y) : \text{ oder}$$

$$\varphi(z) \varphi(z+\xi) = W_2(\xi) + : \varphi(z) \varphi(z+\xi) :$$

$$\text{Nun ist } \varphi(z) \varphi(z+\xi) W_2^{-1}(\xi) \text{ holomorph für } \xi \in \mathbb{R}^4 \text{ mit}$$

$$\text{Definitionsbereich } J_2 \text{ und deswegen auch } W_2^{-1}(\xi) : \varphi(z) \varphi(z+\xi) :$$

$$\varphi(z) \varphi(z+\xi) W_2^{-1}(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_1} \cdots \xi^{\mu_n} B_{\mu_1 \cdots \mu_n}(z)$$

Dies ist aber gleich

$$= 1 + W_2^{-1}(\xi) : \varphi(z) \varphi(z+\xi) : = 1 - (2\pi)^2 \xi^2 : \varphi(z) \varphi(z+\xi) :$$

$$= 1 - 2(2\pi)^2 \xi^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \xi^{\mu_1} \cdots \xi^{\mu_n} : \varphi \varphi_{\mu_1 \cdots \mu_n}(z) \right\}$$

und daher gilt

$$\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} B_{\mu_1, \dots, \mu_n}(z) = -2(2\pi)^2 \xi^2 \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} \varphi_{\mu_1, \dots, \mu_n}(z)$$

oder speziell für  $\varphi^2(z)$

$$\sum_{\mu, \nu} B_{\mu\nu}(z) = -2(2\pi)^2 \xi^2 \varphi^2(z), \quad \text{aufgelöst nach } \varphi^2(z)$$

$$\varphi^2(z) = \frac{-1}{2(2\pi)^2} \sum_{\mu, \nu} B_{\mu\nu}(z)$$

2) Sei  $A(x) = : e^{i\varphi(x)} :$ ,  $(\square + m^2)\varphi(x) = 0$  (freies Feld zur Masse  $m$  in zwei Dimensionen)

Hier gilt:  $A(x)A(y) = (\square, A(x)A(y)\square) : A(x)A(y) :$

oder  $A(z)A(z+\xi)W_2^{-1}(\xi) = : A(z)A(z+\xi) :$

Daher ist:  $A(z)A(z+\xi)$  holomorph für  $\xi \in \mathbb{R}^2$  mit Definitionsbereich  $J_z$ .

$$A(z)A(z+\xi) = W_2(\xi) \left\{ : A^2(z) : + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} : A A_{\mu_1, \dots, \mu_n}(z) : \right\}$$

Der Operator, der zum singulärsten Term gehört - hier  $: A^2(z) :$  - ist nicht nur eine c-Zahl. Durch Störungstheorie inspiriert wird oft die Vermutung geäußert, der Operator, der beim singulärsten Term des Produktes zweier skalarer Feldoperatoren steht, sei nur eine c-Zahl. Hier ist ein Gegenbeispiel dazu.

d) Produkt dreier Feldoperatoren

$$A(z-\eta)A(z)A(z+\xi) + (\eta) + (\xi) + (\xi+\eta) \quad \text{angewandt auf}$$

Zustände aus  $J_z$  ist holomorph für  $\xi, \eta \in \mathcal{U}_+(0)$ . Daher gilt:

$$\begin{aligned} & A(z-\eta)A(z)A(z+\xi) + (\eta) + (\xi) + (\xi+\eta) \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_m} \frac{1}{n!} \xi^{\nu_1} \dots \xi^{\nu_n} \\ & \quad \times \partial_{\eta^{\mu_1}} \dots \partial_{\eta^{\mu_m}} \partial_{\xi^{\nu_1}} \dots \partial_{\xi^{\nu_n}} A(z-\eta)A(z)A(z+\xi) + (\eta) + (\xi) + (\xi+\eta) \Big|_{\xi=\eta=0} \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_m} \xi^{\nu_1} \dots \xi^{\nu_n} C_{\mu_1, \dots, \mu_m; \nu_1, \dots, \nu_n}(z) \end{aligned}$$

Die zusammengesetzten Operatoren  $C_{\mu_1, \dots, \mu_m; \nu_1, \dots, \nu_n}(z)$  haben den Raum  $J_z$  als Definitionsbereich. Die Randwerte  $C_{\mu_1, \dots, \mu_m; \nu_1, \dots, \nu_n}(x)$  sind lokale, operatorwertige Distributionen und auf  $J$  definiert.

Als Beispiel sei wieder das freie Feld  $\varphi(x)$  zur Masse Null erwähnt:

$$\begin{aligned} \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) &= \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) + \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) + \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) \\ &= \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) + \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) + \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) \end{aligned}$$

Daraus folgt für das regularisierte Produkt:

$$\begin{aligned} \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) &= \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) + \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) + \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) \\ &= (2\pi)^4 \{ \eta^2 (\xi + \eta)^2 \varphi(z) + \xi^2 \eta^2 \varphi(z) + \xi^2 (\xi + \eta)^2 \varphi(z) \} \\ &= (2\pi)^6 \{ \xi^2 (\xi + \eta)^2 \eta^2 : \varphi(z) \varphi(z) \varphi(z) : \} \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_m} \xi^{\nu_1} \dots \xi^{\nu_n} C_{\mu_1 \dots \mu_m; \nu_1 \dots \nu_n} (z) \end{aligned}$$

Die ersten nichtverschwindenden Terme dieser Reihe sind:

$$\begin{aligned} &= (2\pi)^4 \xi^2 \eta^2 \left\{ \frac{12}{2! 2!} \varphi(z) + \frac{4}{2! 3!} (\xi^\mu + \eta^\mu) \varphi_{,\mu}(z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{3! 3!} [\xi^\mu \eta^\nu \varphi_{,\mu\nu}(z) - (2\pi)^2 (\xi \cdot \eta) : \varphi^3(z) :] + \dots \right\} \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich  $: \varphi^3(z) :$  zu

$$: \varphi^3(z) : = \frac{-1}{2(2\pi)^6} \frac{\eta^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \xi^{\nu_1 \nu_2 \nu_3}}{\xi^2 (\xi \cdot \eta)^2} C_{\mu_1 \mu_2 \mu_3; \nu_1 \nu_2 \nu_3} (z) + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\xi^\mu \eta^\nu}{(\xi \cdot \eta)} \varphi_{,\mu\nu}(z)$$

e) Nachdem die Operatorentwicklungen für das Produkt von zwei beziehungsweise drei Feldoperatoren angegeben wurden, ist es klar, wie man diese Methode auf n-fache Operatorprodukte erweitert.

$$A(z + \xi_1) \dots A(z + \xi_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \Delta(\xi_i - \xi_j) \quad \text{angewandt auf Zustände } \psi \in \mathcal{H}_z$$

ist holomorph in  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , falls  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathcal{U}_n(0)$ . Die Taylorreihe in  $\xi_1, \dots, \xi_n$  liefert die gewünschte Operatorproduktentwicklung.

Als Beispiel sei hier  $A(x) = : \varphi^p(x) :$ ,  $\varphi(x)$  freies Feld zur Masse  $m > 0$  in zwei Dimensionen, angeführt. Hier gilt nämlich:

$$A(z_1) \cdots A(z_m) = (\Omega, A(z_1) \cdots A(z_m) \Omega) : A(z_1) \cdots A(z_m) :$$

$$(\Omega, A(z_1) \cdots A(z_m) \Omega) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\Omega, A(z_i) A(z_j) \Omega)$$

Mit  $r(\xi) = W_2^{-1}(\xi)$  gilt dann

$$A(z_1) \cdots A(z_m) \prod_{i < j} (z_i - z_j) = : A(z_1) \cdots A(z_m) :$$

Das Wickprodukt  $:A(z+\xi_1) \cdots A(z+\xi_n):$  ist genau das in diesem Kapitel definierte "regularisierte Operatorprodukt" und daher für  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^4$  holomorph, falls es auf Zustände  $\psi \in \mathcal{H}_2$  angewandt wird. Aus diesem Grunde ist  $A(x) = :e^{\varphi(x)}:$  der Prototyp für die Klasse von Wightmantheorien, die in diesem Kapitel II beschrieben wurde.

Das Ziel, Produkte von beliebig vielen Feldoperatoren zu definieren, wurde hier weitgehend erreicht. Aber natürlich geht aus dem hier beschriebenen Formalismus nicht hervor, was man als  $:A^n:(z)$  wählen soll. Zum Beispiel ist

$$A(z)A(z+\xi) + (\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi^{\mu_1} \cdots \xi^{\mu_n} B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z)$$

Wählt man  $\xi = g \cdot \hat{\xi}$ ,  $\hat{\xi}$  fest, so gilt

$$A(z)A(z+g\hat{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{g^n}{r(g\hat{\xi})} \hat{\xi}^{\mu_1} \cdots \hat{\xi}^{\mu_n} B_{\mu_1 \dots \mu_n}(z)$$

Es besteht nun weitgehende Freiheit darin, einen der rechts auftretenden Operatoren als  $:A^2:(z)$  zu wählen. Zur Auswahl bedarf es weiterer Kriterien, die hier nicht erörtert werden sollen.

Anhang A: Randwerteigenschaften von Funktionen, die holomorph in der Vorwärtsröhre sind.

Es sei

$U \subset \mathbb{R}^{4n}$  eine zusammenhängende, offene Menge

$\mathcal{C} \subset V_n^+$  ein offener, konvexer Kegel

$\mathcal{C}_\delta := \mathcal{C} \cap \{y \in \mathbb{R}^{4m} \mid |y| < \delta\}$

$\mathcal{C}'$  ein kompakter Unterkegel von  $V_n^+$

$$\text{mit } |y| = \sum_{k=1}^m \sum_{\mu=0}^3 |y_k^\mu|^2$$

Satz:  $f(z, \xi)$  stetig für  $(z, \xi) \in \mathcal{C}' \times \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G} \subset \mathbb{C}^{4m}$  kompakt,  
und  $\bigwedge_{\xi \in \mathcal{G}} (f(z, \xi))$  holomorph in  $\underline{z}$

Für  $g \in \mathcal{D}(U)$  sei definiert

$$F_{\underline{y}}(g, \xi) := \int d\underline{x} \, g(\underline{x}) f(\underline{x} + i\underline{y}, \xi)$$

Dann sind äquivalent:

(A) Für alle  $g \in \mathcal{D}(U)$  existiert  $\lim_{\underline{y} \rightarrow 0} F_{\underline{y}}(g, \xi)$  und

$F_{\underline{y}}(g, \xi)$  ist stetig für  $(\underline{y}, \xi) \in \overline{\mathcal{C}}'_\delta \times \mathcal{G}$  für jeden kompakten Unterkegel  $\overline{\mathcal{C}}'$  bei geeignetem  $\delta > 0$ .

(B) Für alle kompakten Mengen  $K \subset U$  und kompakten Unterkegel  $\overline{\mathcal{C}}' \subset V_n^+$  gibt es  $\delta > 0, M > 0$  und  $N \ni m \geq 0$  mit

$$|f(\underline{x} + i\underline{y}, \xi)| \leq \frac{M}{|\underline{y}|^m} \quad \text{für alle } (\underline{x} + i\underline{y}, \xi) \in [K + i\overline{\mathcal{C}}'_\delta \setminus \{0\}] \times \mathcal{G}$$

Der Beweis dieses Satzes wird in [22] gegeben und soll hier nicht aufgeführt werden.

### Folgerungen und Anwendungen:

1) Als Spezialfall erhält man:

Ist  $f(\underline{z})$  holomorph in  $\mathcal{C}_n^+$ , so gilt:

Der Randwert  $f(\underline{x} + i0)$  ist eine Distribution aus  $\mathcal{D}'(U)$  genau dann

wenn  $\bigwedge$

$K \subset U$   
 $K$  kompakt

$\bigwedge$   
 $\overline{\mathcal{C}}' \subset V_n^+$   
kompakter  
Unterkegel

$\bigvee$   
 $\delta > 0$   
 $M > 0$   
 $m \geq 0$

$$( |f(\underline{x} + i\underline{y})| \leq \frac{M}{|\underline{y}|^m} \quad \text{für alle } \underline{x} + i\underline{y} \in K + i\overline{\mathcal{C}}'_\delta \setminus \{0\} )$$

## 2) Multiplikation von Distributionen

Erfüllen  $f_1(\underline{z}, \underline{\xi})$  und  $f_2(\underline{z}, \underline{\xi})$  die Voraussetzungen des Satzes und die Bedingung (A), so besitzt auch  $(f_1 \cdot f_2)(\underline{z}, \underline{\xi})$  die Eigenschaft (A)

Beweis: Nach Satz gilt für das Produkt wegen (B)

$$|(f_1 f_2)(\underline{z} + i\underline{y}, \underline{\xi})| \leq \frac{M_1 M_2}{|\underline{y}|^{m_1+m_2}} \quad \text{und daher Eigenschaft (A)}$$

Beispiele für (2) sind die Produkte  $W_{n+1}(\underline{\xi}) r(\underline{\xi}_j)$  oder

$$W_{n+1}(\underline{\xi}) \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} r(\underline{\xi}_i + \dots + \underline{\xi}_j)$$

## 3) Randwerte von vektorwertigen holomorphen Funktionen

Sei  $\Psi(\underline{\xi}) := H(\bar{z} + \underline{\xi}_1) \dots H(\bar{z} + \underline{\xi}_1 + \dots + \underline{\xi}_n) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (\underline{\xi}_i + \dots + \underline{\xi}_j) H(\bar{z}'_1) \dots H(\bar{z}'_k) \Omega$   
mit  $\bar{z}, \bar{z}'_1 - \bar{z}, \dots, \bar{z}'_k - \bar{z}_{k-1} \in \mathbb{C}^+$ .

$\Psi(\underline{\xi})$  ist holomorph für  $\underline{\xi} \in \mathbb{C}_n^+ \cap U(0)$  (bei geeignet gewählter Umgebung  $U(0)$ )

Beh:  $\Psi(\underline{\xi} + i\underline{0})$  ist vektorwertige Distribution über  $\mathcal{D}([\mathbb{K}\mathcal{U}_r(0)]^m)$

Beweis: Für  $g \in \mathcal{D}([\mathbb{K}\mathcal{U}_r(0)]^m)$  sei definiert

$$\Psi_{\eta}(g) := \int d\underline{\xi} g(\underline{\xi}) \Psi(\underline{\xi} + i\underline{\eta}), \quad \eta \in V_n^+$$

$$\begin{aligned} \gamma \|\Psi_{\eta_1}(g) - \Psi_{\eta_2}(g)\|^2 &= (\Psi_{\eta_1}(g), \Psi_{\eta_1}(g)) + (\Psi_{\eta_2}(g), \Psi_{\eta_2}(g)) \\ &\quad - (\Psi_{\eta_1}(g), \Psi_{\eta_2}(g)) - (\Psi_{\eta_2}(g), \Psi_{\eta_1}(g)) \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$(\Psi_{\eta_1}(g), \Psi_{\eta_2}(g)) = \iint d\underline{\xi}_1 d\underline{\xi}_2 \bar{g}(\underline{\xi}_1) g(\underline{\xi}_2) (\Psi(\underline{\xi}_1), \Psi(\underline{\xi}_2))$$

mit  $\underline{\xi}_1 = \underline{\xi}_1 + i\underline{\eta}_1, \underline{\xi}_2 = \underline{\xi}_2 + i\underline{\eta}_2$

$$\begin{aligned} (\Psi(\underline{\xi}_1), \Psi(\underline{\xi}_2)) &= (\Omega, H(\bar{z}'_1) \dots H(\bar{z} + \bar{\xi}_{1,1} + \dots + \bar{\xi}_{n,1}) \dots H(\bar{z} + \bar{\xi}_{1,1}) \\ &\quad \times H(\bar{z} + \bar{\xi}_{1,2}) \dots H(\bar{z} + \bar{\xi}_{1,2} + \dots + \bar{\xi}_{n,2}) \dots H(\bar{z}'_k) \Omega) \prod_{2 \leq i \leq j \leq n} (\bar{\xi}_{i,1} + \dots + \bar{\xi}_{j,1}) + (\bar{\xi}_{i,2} + \dots + \bar{\xi}_{j,2}) \end{aligned}$$

Sei nun  $\underline{\xi}' = (-\bar{\xi}_{1,1}, \dots, -\bar{\xi}_{n,1})$ ,  $\underline{\xi} = \underline{\xi}_2$  so ist

$$(\Psi(\underline{\xi}_1), \Psi(\underline{\xi}_2)) = f(\underline{\xi}', \underline{\xi}) \quad \text{holomorph für } \underline{\xi}', \underline{\xi} \in \mathbb{C}_n^+ \cap U(0)$$

und

$$(\Psi_{\eta_1}(g), \Psi_{\eta_2}(g)) = \iint d\underline{\xi}' d\underline{\xi} \bar{g}(-\underline{\xi}') g(\underline{\xi}) f(\underline{\xi}' + i\underline{\eta}_1, \underline{\xi} + i\underline{\eta}_2)$$

Nach (2) existiert der Randwert  $\varphi_1 \rightarrow 0$ ,  $\varphi_2 \rightarrow 0$  und ist unabhängig vom Grenzübergang. Daher ist  $\lim_{\varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 0} \|\varphi_{\varphi_1}(g) - \varphi_{\varphi_2}(g)\| = 0$ , was die starke Konvergenz von  $\varphi_{\varphi_1}(g)$  nach sich zieht.

4) Korollar: Sei  $f(\underline{z}, \underline{\xi})$  eine  $C^\infty$ -Funktion in  $\underline{\xi} \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ .

$f$  und alle Ableitungen  $D_{\underline{\xi}} f$  genügen den Voraussetzungen des Satzes und erfüllen (A).

Dann gilt für alle  $g \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (D_{\underline{\xi}} F)_y(g, \underline{\xi}) = D_{\underline{\xi}} \lim_{y \rightarrow 0} F_y(g, \underline{\xi})$$

d.h. Randwertbildung und Differentiation nach  $\underline{\xi}$  vertauschen miteinander.

Beweis: Es genügt dies für  $f$  und  $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$  zu zeigen. O.E. kann man annehmen, daß  $f$  nur von  $\underline{z}$  und  $\underline{\xi} = \xi_i$  abhängt.

Sei  $g \in \mathcal{D}(\mathcal{U})$ ; nach Voraussetzung ist

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} F\right)_y(g, \underline{\xi}) := \int dx g(x) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} f(x, y, \underline{\xi}) \text{ stetig für } (y, \underline{\xi}) \in \bar{\mathcal{U}}' \times \mathcal{O}$$

also gleichmäßig stetig in jeder kompakten Teilmenge  $\mathcal{K} \subset \bar{\mathcal{U}}' \times \mathcal{O}$

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|F_y(g, \underline{\xi} + \Delta) - F_y(g, \underline{\xi}) - \Delta \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\xi}}\right)_y(g, \underline{\xi})| = \frac{\Delta^2}{2} \left| \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\xi}^2}\right)_y(g, \underline{\xi} + \Theta \Delta) \right|$$

mit  $0 < \Theta < 1$ . Für jede kompakte Menge  $\mathcal{K} \subset \bar{\mathcal{U}}' \times \mathcal{O}$  kann man

$\left| \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \underline{\xi}^2}\right)_y(g, \underline{\xi}) \right|$  universell durch eine Konstante (z.B. das Maximum) abschätzen. Bei geeigneter Wahl von  $\mathcal{K}$  folgt unmittelbar die Behauptung.

Anhang B: Sei  $F(\xi)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{U}_\delta$ , invariant unter reellen Lorentztransformationen und gelte  $F(-\bar{\xi}) = \overline{F(\xi)}$ . Dann gibt es eine Funktion  $\hat{F}(\sigma)$ , holomorph für  $\sigma \in \mathbb{C} \setminus [\delta^2, \infty)$ , so daß gilt:

$$F(\xi) = \hat{F}(\xi^2) \quad (\hat{F}(\xi^2) \text{ ist eine holomorphe Fortsetzung von } F(\xi))$$

Beweis:

1) Nach dem Theorem von Hall und Wightman gibt es zu  $F(\xi)$  eine Funktion  $\hat{F}(\sigma)$ , holomorph in  $\mathbb{C} \setminus [\infty)$  mit  $F(\xi) = \hat{F}(\xi^2)$  für  $\xi \in \mathcal{C}^+$  ( $\nexists \xi^2 \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ )

2) Beh:  $\hat{F}(\sigma)$  ist holomorph fortsetzbar zu  $\sigma \in (0, \delta^2)$

Beweis: a) für  $\sigma \in (0, \delta^2)$  sei definiert:

$$\xi_\sigma := \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma} \\ \sigma \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_\delta, (\sqrt{\sigma} > 0) \quad \text{mit } \mathcal{U}_\delta := \{ \xi \mid |\xi|^2 < \delta^2 \}$$

und damit  $\hat{F}(\sigma) := F(\xi_\sigma)$ . Daher ist  $\hat{F}(\sigma)$  stetig für  $\sigma \in (0, \delta^2)$

b) Seien  $(\sigma_n^\pm \mid n \in \mathbb{N})$  zwei Folgen mit  $\lim_n \sigma_n^\pm = \sigma \in (0, \delta^2)$  und  $\exists_m \sigma_m^\pm \geq 0$

$$\text{Sei } \xi_{\sigma_n^\pm} := \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_n^\pm} \\ \sigma_n^\pm \end{pmatrix} \quad \text{mit } \arg \sqrt{\sigma_n^+} \in (0, \frac{\pi}{2}), \arg \sqrt{\sigma_n^-} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$$

Dann gilt  $\lim_n \xi_{\sigma_n^\pm} = \xi_\sigma$ . Ohne Einschränkung kann man  $\xi_{\sigma_n^\pm} \in \mathcal{U}_\delta$  annehmen (durch Weglassen höchstens endlich vieler  $\xi_{\sigma_i^\pm}$ )

c) Zu zeigen ist noch:  $\lim_n \hat{F}(\sigma_n^+) = \hat{F}(\sigma) = \lim_n \hat{F}(\sigma_n^-)$

nach (1) gilt:  $\hat{F}(\sigma_n^+) = F(\xi_{\sigma_n^+})$ ,  $\hat{F}(\sigma_n^-) = F(\xi_{\sigma_n^-})$  und

daher  $\lim_n \hat{F}(\sigma_n^\pm) = \lim_n F(\xi_{\sigma_n^\pm}) = F(\lim_n \xi_{\sigma_n^\pm}) = F(\xi_\sigma) = \hat{F}(\sigma)$  w.z.z.w.

3) Beh:  $\hat{F}(\sigma)$  ist holomorph fortsetzbar zu  $\sigma = 0$

Beweis: Nach (1) und (2) ist  $\hat{F}(\sigma)$  holomorph für  $0 < |\sigma| < \delta^2$

Für  $0 < |\sigma| < (\frac{\delta}{2})^2$  gilt:

$$|\hat{F}(\sigma)| \leq \sup_{\xi \in \mathcal{U}_\delta} |F(\xi)| \leq \max_{\xi \in \mathcal{U}_\delta} |F(\xi)| < \infty, \text{ da } F \text{ analytisch}$$

Also ist  $|\hat{F}(\sigma)|$  beschränkt für  $0 < |\sigma| < (\frac{\delta}{2})^2$  und daher holomorph zu  $\sigma = 0$  fortsetzbar.

4) Für  $\xi \in \mathcal{C}^+$  stimmen  $F(\xi)$  und  $\hat{F}(\xi^2)$  überein.

Bezeichne  $\mathcal{g}$  die Abbildung  $\mathbb{C}^4 \ni \xi \mapsto \mathcal{g}(\xi) = \xi^2 \in \mathbb{C}$

Nun ist  $\bar{g}^{-1}(\mathbb{C} \setminus [s^2, \infty)) \supset \tau' \cup U_s$  und daher ist  $\hat{F}(s^2)$  eine holomorphe Fortsetzung von  $F(s)$  in das Gebiet

$$U_g = \bar{g}^{-1}(\mathbb{C} \setminus [s, \infty)) = \tau' \cup \{s \mid s^2 \in [0, s^2)\}$$

Anhang C: Zwei Sätze aus der Funktionentheorie

Edge of the Wedge Theorem:

Sei  $O \subset \mathbb{C}^m$  eine offene Menge, die eine reelle Menge  $U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, enthält.

$\mathcal{C}$  sei ein offener, konvexer Kegel des  $\mathbb{R}^n$ .

$F_1$  sei holomorph in  $D_1 = (\mathbb{R}^n + i\mathcal{C}) \cap O$

$F_2$  sei holomorph in  $D_2 = (\mathbb{R}^n - i\mathcal{C}) \cap O$

Für alle  $g \in \mathcal{D}(U)$  gelte:

$$\lim_{\mathcal{C} \ni y \rightarrow 0} \int d\underline{x} g(\underline{x}) F_1(\underline{x} + iy) = T(g) = \lim_{\mathcal{C} \ni y \rightarrow 0} \int d\underline{x} g(\underline{x}) F_2(\underline{x} - iy)$$

wobei  $T \in \mathcal{D}'(U)$

Dann gibt es eine komplexe Umgebung  $N$  von  $U$  und eine holomorphe Funktion  $G$ , die auf  $D_1$  mit  $F_1$  und auf  $D_2$  mit  $F_2$  übereinstimmt, und in  $N$  holomorph ist.

Hartogs' Theorem:

$F(\underline{z})$  sei eine Funktion auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{C}^m$ .

$F$  ist genau dann holomorph, wenn  $F$  in jeder Variablen einzeln holomorph ist.

### III. Kapitel: Verallgemeinerung der Ergebnisse

Es ist klar, daß die Voraussetzungen, die Kapitel II zu Grunde liegen, nicht genügend allgemein sind. Man möchte ja ein Verfahren zur Definition von Operatorprodukten haben, das zumindest die freien Felder zu beliebiger Masse einschließt. Natürlich ist dieses Verfahren für freie Felder und den daraus abgeleiteten Wickpolynomen nicht notwendig, denn die Wickordnung liefert bereits eine Entwicklung für beliebige Produkte der Feldoperatoren. Vielleicht ist es instruktiv, sich nochmals die Beispiele aus I.2 vor Augen zu halten.

1)  $\varphi(x)$  freies Feld zur Masse  $m > 0$ ,  $(\square + m^2) \varphi(x) = 0$

$$\varphi(z_1) \varphi(z_2) = : \varphi(z_1) \varphi(z_2) : + W_2(z_2 - z_1)$$

2)  $A(x) = : \varphi^2(x)$ , Wickquadrat des freien Feldes  $\varphi(x)$

$$A(z_1) A(z_2) = : A(z_1) A(z_2) : + 4 W_2(z_2 - z_1) : \varphi(z_1) \varphi(z_2) : + 2 W_2^2(z_2 - z_1)$$

Die hier auf den rechten Seiten auftretenden Operatoren sind jeweils regulär für  $z_1 = z_2$  die singulären Anteile stecken nur in den singulären Funktionen  $W_2(z_2 - z_1)$ .

Für Vektoren  $\phi \in \mathcal{J}_2$  mit  $z \in \mathcal{T}^+$  sind die vektorwertigen Funktionen  $: \varphi(z) \varphi(z + \xi) :$  und  $: A(z) A(z + \xi) :$  sogar holomorph für  $\xi \in \mathbb{R}^4$ .

Im Unterschied zu Kapitel II können die hier auftretenden singulären Funktionen jedoch nicht simultan regularisiert werden. Sie sind vielmehr linear unabhängig über dem Körper der bei  $\xi = 0$  meromorphen Funktionen (siehe Kapitel I.2 Forderung (3a)).

#### III.1 Problemstellung

Ein natürlicher Ausgangspunkt zur Verallgemeinerung der Gedankengänge von Kapitel II ist - in Anlehnung an Kapitel I - folgende Annahme:

(a) Die Vierpunktfunktion besitze eine Zerlegung der Form

$$W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^l G_{4,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_k(\xi) \quad \text{wobei die } u_k(\xi)$$

bzw.  $G_{4,k}(\xi)$ ,  $k=1, \dots, l$ , lorentzinvariante, holomorphe Funktionen für  $\xi \in \mathcal{T}^+$  bzw.  $\xi \in \mathcal{T}_3^+$  sind und darüberhinaus  $G_{4,k}(\xi)$  holomorph zu  $\xi \in \mathcal{T}_2^+ \times [\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{U}_+(0)]$  fortsetzbar ist.

- (b) Die Hoffnung dabei ist nun, daß daraus - unter schwachen zusätzlichen Annahmen - die Existenz von holomorphen Zuständen  $\phi_{2,k}(z, z+\xi)$ ,  $k=1, \dots, \ell$  folgt mit 
$$\phi_2(z, z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} \phi_{2,k}(z, z+\xi) u_k(\xi) \quad \text{und}$$

$$(\phi_2(\bar{z}_1, \bar{z}_0), \phi_{2,k}(z_2, z_3)) = G_{4,k}(z_1 - z_0, z_2 - z_1, z_3 - z_2)$$

Damit hätte man eine Zerlegung aller n-Punkt-Funktionen im letzten Argument - nämlich:

$$W_{n+1}(z) = \sum_{k=1}^{\ell} \psi_{n+1,k}(z) u_k(z_n - z_{n-1}) \quad \text{mit}$$

$$\psi_{n+1,k}(z) = (\phi_{n-1}(\bar{z}_{n-2}, \dots, \bar{z}_0), \phi_{2,k}(z_{n-1}, z_n))$$

Die Translationsinvarianz ergibt dann

$$W_{n+1}(\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} G_{n+1,k}(\xi) u_k(\xi_n)$$

- (c) Würde man nun, daß die  $G_{n+1,k}$  in allen permutierten Röhren holomorph sind, so bekäme man eine Zerlegung von  $W_{n+1}(\xi)$  im Argument  $\xi_j$ :

$$W_{n+1}(\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} G_{n+1,k}^{(j)}(\xi) u_k(\xi_j) \quad \text{dabei geht}$$

aus  $G_{n+1,k}$  durch eine Permutation der Argumente hervor.

- (d) Mit ähnlicher Argumentation wie in Punkt (b) würde man dann auf die Existenz von Zuständen  $\phi_{m,k}(z_1, \dots, z_m)$  schließen, die holomorph für  $z_1 = z_2$  sind und die Eigenschaft

$$\phi_m(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=1}^{\ell} \phi_{m,k}(z_1, \dots, z_m) u_k(z_2 - z_1) \quad \text{haben.}$$

Dies gibt nun Anlaß zu einer Zerlegung des Operatorproduktes

$$A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} B_k(z, \xi) u_k(\xi) \quad \text{mit Definitionsbereich } J_z,$$

denn

$$\begin{aligned} A(z_1)A(z_2)\phi_{m-2}(z_3, \dots, z_m) &= \phi_m(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=1}^{\ell} \phi_{m,k}(z_1, \dots, z_m) u_k(z_2 - z_1) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} B_k(z_1, z_2 - z_1) \phi_{m-2}(z_3, \dots, z_m) u_k(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Durch eine Taylorentwicklung nach  $\xi$  erhält man lokale Operatorprodukte

$$A(z)A(z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \{^{\mu_1} \dots \}^{\mu_n} B_{k, \mu_1, \dots, \mu_n}(z) u_k(\xi)$$

Dieses Programm scheitert jedoch an zwei Stellen:

Im Punkt (b), was nicht so schlimm wäre, denn man könnte von einer Zerlegung des Zustandes  $\phi_2(z, z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} \phi_{2,k}(z, z+\xi) u_k(\xi)$  ausgehen. Gravierender ist Punkt (c). Wenn man nicht weiß, ob die  $G_{n+1,k}(\xi)$  in den permutierten Röhren holomorph sind, ist es unmöglich, von der Zerlegung der Funktion  $W_{n+1}(\xi)$  im letzten Argument  $\xi_n$  auf eine Zerlegung im Argument  $\xi_j$  zu schließen.

Im Abschnitt III.2 wird auf die Schwierigkeiten von (b) eingegangen und ein anderer Lösungsweg vorgeschlagen. Der dritte Abschnitt befaßt sich mit dem Zusammenhang zwischen den Singularitäten von  $W_{n+1}(\underline{z})$  im Argument  $\{z_n\}$  und  $\{\bar{z}_j\}$ . In III.4 wird eine - wenngleich nicht ganz zufriedenstellende - Lösung der Probleme (b) und (c) angegeben, die zu einer Operatorproduktentwicklung - wie in (d) skizziert - führt.

### III.2 Zerlegung des Zustandes $\phi_2(z, z+\xi)$

Welche zusätzlichen Forderungen sind nun nötig, so daß aus einer Zerlegung der Vierpunktfunktion eine entsprechende Zerlegung des Jostzustandes  $\phi_2(z, z+\xi)$  folgt.

Der Ausgangspunkt ist folgende Annahme:

- (a) "Zerlegung der Vierpunktfunktion" (vergleiche I.2, Annahmen (z))

Es existiere eine Zerlegung

$$W_4(\xi) = \sum_{k=1}^l G_{4,k}(\xi) u_k(\xi_n) \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

- (a1)  $u_k(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  holomorph in  $\tau^+$ , lorentzinvariant und  $u_k(-\bar{\xi}) = \overline{u_k(\xi)}$

- (a2)  $G_{4,k}(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  holomorph in  $\tau_3^+$  und für  $(\xi_1, \xi_2) \in \tau_2^+$  holomorph zu  $\xi_3 \in U_{\mathbb{R}}(0)$  fortsetzbar

- (a3) "Lineare Unabhängigkeit der  $u_1, \dots, u_l$  über dem Körper der bei  $\xi = 0$  meromorphen Funktionen"

Sind  $f_1(\xi), \dots, f_l(\xi)$  holomorph für  $\xi \in U(0)$  und gilt

$$\sum_{k=1}^l f_k(\xi) u_k(\xi) \equiv 0 \quad \text{für } \xi \in \tau^+ \cap U(0), \text{ so folgt}$$

#### Bemerkungen:

- 1) Definiert man für  $z_1, z_0, z_2, z_3 \in \tau^+$   
 $\mathcal{G}_{4,k}(z_0, z_1, z_2, z_3) = G_{4,k}(z_1 - z_0, z_2 - z_1, z_3 - z_2)$ , so erhält man eine  
 Zerlegung  $W_4(\underline{z}) = \sum_{k=1}^l \mathcal{G}_{4,k}(\underline{z}) u_k(z_3 - z_2)$  mit entsprechenden  
 Holomorphieeigenschaften der  $\mathcal{G}_{4,k}(\underline{z})$ .

2) Ordnet man dem Jostzustand  $\phi_2(z_1, z_2)$  die Funktion

$\mathcal{Y}_{4,k}(\bar{z}_2, \bar{z}_1, z, z+\xi), (z, \xi) \in \mathcal{T}_2^+$  zu, so wird durch die

Abbildung

$$\mathcal{J}_2 \ni \phi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_2(z_1^{(i)}, z_2^{(i)}) \longmapsto \mathcal{Y}_{4,k}(z, z+\xi)(\phi) := \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i \mathcal{Y}_{4,k}(\bar{z}_2^{(i)}, \bar{z}_1^{(i)}, z, z+\xi)$$

ein antilineares Funktional auf dem Raum  $\mathcal{J}_2$  definiert.

Für  $\phi \in \mathcal{J}_2$  ist  $\mathcal{Y}_{4,k}(z, z+\xi)(\phi)$  holomorph für  $(z, \xi) \in \mathcal{T}^+ \times [\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{U}, (0, 1)]$

Damit erhält man eine Zerlegung des Skalarproduktes

$$(\phi, \phi_2(z, z+\xi)) = \sum_{k=1}^l \mathcal{Y}_{4,k}(z, z+\xi)(\phi) u_k(\xi) \quad \text{für} \quad \phi \in \mathcal{J}_2$$

Um nun den Zustand  $\phi_2(z, z+\xi)$  zerlegen zu können, muß man die Beschränktheit der Funktionale  $\mathcal{Y}_{4,k}(z, z+\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  zeigen. Dazu sollen nun entsprechende Annahmen gemacht werden:

(b) "Darstellung der  $\mathcal{Y}_{4,k}(z, z+\xi)(\phi)$  als Skalarprodukte"

(b1) Für  $z, \xi \in \mathcal{T}^+$  gibt es Zustände  $\phi_{2,k}(z, z+\xi) \in \mathcal{H}_2$  mit

$$\mathcal{Y}_{4,k}(z, z+\xi)(\phi) = (\phi, \phi_{2,k}(z, z+\xi)) \quad \text{für alle} \quad \phi \in \mathcal{J}_2$$

Bemerkungen:

3) Aus der Zerlegung des Skalarproduktes  $(\phi, \phi_2(z, z+\xi))$ ,  $\phi \in \mathcal{J}_2$  folgt, daß es genügt, Bedingung (b1) nur für 1-1 Funktionale zu fordern.

4) Für  $\psi \in \mathcal{H}$  ist  $(\psi, \phi_{2,k}(z, z+\xi))$  nicht notwendig holomorph und daher reicht Bedingung (1) nicht aus.

(b2) Für jede kompakte Menge  $K \subset \mathcal{T}_2^+$  sei  $\{ \|\phi_{2,k}(z, z+\xi)\| \mid (z, \xi) \in K \}$  beschränkt.

Hilfssatz 1:  $\phi_{2,k}(z, z+\xi)$  ist für  $z, \xi \in \mathcal{T}^+$  eine vektorwertige, holomorphe Funktion.

Beweis: (siehe auch Kapitel I, Anhang B)

1) Wegen der Äquivalenz von schwacher und starker Holomorphie, genügt es zu zeigen, daß für jedes  $\psi \in \mathcal{H}$  das Skalarprodukt  $(\psi, \phi_{2,k}(z, z+\xi))$  holomorph in  $\mathcal{T}_2^+$  ist.

2) Sei  $K \subset \mathcal{T}_2^+$  ein kompaktes Gebiet, so ist wegen (b2)

$$\sup_{(z, \xi) \in K} \|\phi_{2,k}(z, z+\xi)\| \leq M_k < \infty$$

- 3) Sei nun  $\psi \in \mathcal{H}_2$ . Dazu gibt es eine Folge  $(\phi_m \mid m \in \mathbb{N})$ ,  $\phi_m \in \mathcal{J}_2$  mit  $\psi = \lim_m \phi_m$ . Für  $(z, \xi) \in K$  gilt dann:

$$|(\psi - \phi_m, \phi_{2,k}(z, \xi))| \leq \|\psi - \phi_m\| \cdot \|\phi_{2,k}(z, \xi)\| \leq M_k \cdot \|\psi - \phi_m\|$$

Daher konvergieren die holomorphen Funktionen  $(\phi_m, \phi_{2,k}(z, \epsilon + \xi))$  gleichmäßig in  $K$  gegen  $(\psi, \phi_{2,k}(z, \epsilon + \xi))$  und die Grenzfunktion ist ebenfalls holomorph in  $K$ . w.z.z.w.

Die Bedingungen (b1) und (b2) können durch andere ersetzt werden - etwa

- (b1') Für alle  $\psi \in \mathcal{H}_2$  ist  $\mathcal{G}_{4,k}(z, z+\xi)(\psi)$  definiert und holomorph für  $z, \xi \in \mathcal{T}^+$
- (b2') Es gibt ein Gebiet  $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}^+$ , so daß für  $(z, \xi) \in \mathcal{G}$  das Funktional  $\mathcal{G}_{4,k}(z, z+\xi)$  beschränkt ist.

Die Äquivalenz zu den vorhergehenden Bedingungen ist klar.

Zusätzlich benötigt man noch eine Annahme über die holomorphe Fortsetzbarkeit:

- (b3) Für alle  $\psi \in \mathcal{H}_2$  ist  $(\psi, \phi_{2,k}(z, z+\xi))$  holomorph zu  $z \in \mathcal{T}^+$ ,  $\xi \in \mathcal{U}_+(0)$  fortsetzbar.

Damit erhält man

Hilfssatz 2: Unter den Annahmen (a) und (b) gilt für  $z, \xi \in \mathcal{T}^+$

$$\phi_2(z, z+\xi) = \sum_{k=1}^{\ell} \phi_{2,k}(z, z+\xi) \cup_k(\xi), \quad \text{wobei die Vektoren } \phi_{2,k}(z, z+\xi) \text{ in } \mathcal{H}_2 \text{ liegen und holomorph für } (z, \xi) \in \mathcal{T}^+ \times [\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{U}_+(0)] \text{ sind.}$$

Beweis: folgt unmittelbar aus Hilfssatz 1 und Annahme (b3).

Der hier geschilderte Weg zu einer Zerlegung des Jostzustandes  $\phi_2(z, z+\xi)$  ist nicht besonders attraktiv, da fast alles in den Annahmen (b1) bis (b3) gefordert werden muß. Daher wird nun ein anderer Zugang aufgezeigt, der im wesentlichen aus einer Annahme an die  $u_1(\xi)$ , ...,  $u_1(\xi)$  besteht.

Zur Erläuterung sei die Idee kurz an einem einfachen Beispiel demonstriert:

Beispiel:  $\mathcal{H}$  sei ein Hilbertraum. Für  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  sei  $\phi(z)$  eine vektorwertige, holomorphe Funktion in  $\mathcal{H}$ . Für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  gelte ferner

$$(\psi, \phi(z)) = G_1(z)(\psi) u(z) + G_2(z)(\psi) \quad \text{mit}$$

- (1)  $G_1(z)(\psi)$  und  $G_2(z)(\psi)$  holomorph in  $\mathbb{C} \setminus [\alpha, \infty)$ ,  $\alpha > 0$
- (2)  $u(z)$  holomorph in  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$
- (3) Zu jeder ganzen Zahl  $m$  gibt es eine Nullfolge  $(z_m | m \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  so daß entweder  $\lim_m (z_m)^m u(z_m) = 0$  oder  $\lim_m \frac{1}{(z_m)^m u(z_m)} = 0$  gilt.

Satz: Unter den Annahmen des Beispiels gibt es für  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  holomorphe Vektoren  $\phi_1(z)$  und  $\phi_2(z)$  in  $\mathcal{H}$  mit  $G_1(z)(\psi) = (\psi, \phi_1(z))$  und  $G_2(z)(\psi) = (\psi, \phi_2(z))$  d.h.  $\phi(z) = \phi_1(z) u(z) + \phi_2(z)$

Beweis: a) Sei  $G_1(z)(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\psi) z^n$ ,  $G_2(z)(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\psi) z^n$ ,  $|z| < \alpha$   
 $\gamma (\psi, \phi(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\psi) z^n u(z) + b_n(\psi) z^n$

b) Beh: Es gibt Zustände  $\phi_{1,n}$  und  $\phi_{2,n}$  mit  $a_n(\psi) = (\psi, \phi_{1,n})$  und  $b_n(\psi) = (\psi, \phi_{2,n})$

Bew: Zu  $m = 0$  gibt es eine Nullfolge  $(z_n)$  mit  $\lim_m u(z_n) = 0$  oder  $\lim_m \frac{1}{u(z_n)} = 0$

Gelte etwa  $\lim_m \frac{1}{u(z_n)} = 0$

Betrachte  $\frac{(\psi, \phi(z))}{u(z)} = G_1(z)(\psi) + G_2(z)(\psi) \frac{1}{u(z)}$  daraus folgt für alle  $\psi \in \mathcal{H}$   
 $a_0(\psi) = \lim_m \frac{(\psi, \phi(z_m))}{u(z_m)} + b_0(\psi) \lim_m \frac{1}{u(z_m)} = \lim_m (\psi, \frac{\phi(z_m)}{u(z_m)})$   
 d.h.  $a_0$  ist der schwache Grenzwert von  $(\frac{\phi(z_m)}{u(z_m)} | m \in \mathbb{N})$

Da der Hilbertraum  $\mathcal{H}$  schwach vollständig ist, gibt es  $\phi_{1,0} \in \mathcal{H}$  mit  $a_0(\psi) = (\psi, \phi_{1,0})$ . Damit erhält man

$$(\psi, \phi(z) - \phi_{1,0} u(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\psi) z^n u(z) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\psi) z^n$$

Hätte aber  $\lim_m u(z_n) = 0$  gegolten, so hätte man  $b_0(\psi) = (\psi, \phi_{2,0})$  erhalten.

Zu  $m = 1$  gibt es eine Folge  $(z_n)$  mit  $\lim_m z_n u(z_n) = 0$  oder  $\lim_m \frac{1}{z_n u(z_n)} = 0$ .

Der erste Fall liefert  $b_0(\psi) = \lim_m (\psi, \phi(z_m) - \phi_{1,0} u(z_m)) = (\psi, \phi_{2,0})$ ,  
 im anderen Fall ergibt sich

$$a_1(\psi) = \lim_m (\psi, \frac{\phi(z_m) - \phi_{1,0} u(z_m)}{z_m u(z_m)}) = (\psi, \phi_{1,1})$$

Es können nun folgende zwei Spezialfälle eintreten:

α) Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^m u(z_n) = 0$ .

Dann erhält man Zustände  $\phi_{2,n}$  mit  $b_n(\psi) = (\psi, \phi_{2,n})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

β) Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n^m u(z_n)} = 0$

In diesem Fall existieren Zustände  $\phi_{1,n}$  mit  $a_n(\psi) = (\psi, \phi_{1,n})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Wie in Beweisteil (c) gezeigt wird, konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{1,n} z^n$  für  $|z| < a$  absolut. Daher ist im Fall (α)  $G_1(z)(\psi)$  beschränkt und damit natürlich auch  $G_2(z)(\psi)$ , denn es gilt  $G_2(z)(\psi) = (\psi, \phi(z)) - G_1(z)(\psi)u(z)$ .

Die Situation im Fall (β) ist dazu analog.

Tritt keiner dieser Spezialfälle ein, so beweist man die Behauptung induktiv.

c) Beh:  $\phi_i(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{i,n} z^n$  absolut konvergent für  $|z| < a$ ,  $i = 1, 2$ .

$\phi_1(z)$  und  $\phi_2(z)$  sind holomorphe, vektorwertige Funktionen für  $z \in \mathbb{C} \setminus [a, \infty)$

Bew: Für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  ist  $G_i(z)(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi, \phi_{i,n}) z^n$  für  $|z| < a$

absolut konvergent. Nach [23] folgt daraus die absolute Konvergenz von

$\sum_{n=0}^{\infty} \|\phi_{i,n}\| |z|^n$ . Da für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  die Funktionen  $G_i(z)(\psi)$  holomorph in  $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$  sind, besitzen die vektorwertigen Funktionen  $\phi_i(z)$  holomorphe Fortsetzungen nach  $\mathbb{C} \setminus [a, \infty)$ .

Damit ist der Satz bewiesen.

Der wesentliche Punkt an der Voraussetzung (3) ist, daß sie gestattet, die Taylorkoeffizienten von  $G_i(z)$  im Punkt  $z = 0$  als schwache Grenzwerte von Zuständen aus  $\mathcal{H}$  darzustellen und so deren Beschränktheit - als antilineare Funktionale - zu zeigen.

Welche Bedingungen muß nun die Vierpunktfunktion erfüllen, um einen ähnlichen Beweis führen zu können?

(1) Die Vierpunktfunktion besitzt eine Zerlegung wie in (a1) bis (a3) formuliert.

An die Stelle von (b) tritt

(2) Für alle  $\psi \in \mathcal{H}_2$  sind die Funktionen  $y_{4,k}(z, z+\xi)(\psi)$  holomorph für  $(z, \xi) \in \mathbb{C}^+ \times [\mathbb{C}^+ \cup \mathcal{U}_+(0)]$

Zur Formulierung der Ordnungsrelation der  $u_1, \dots, u_l$  dient

Bemerkung 5: Wegen der Lorentzinvarianz der Funktionen  $u_1, \dots, u_l$  gibt es Funktionen  $v_1, \dots, v_l$ , holomorph in  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ , so daß gilt:

$$u_k(\xi) = v_k(\xi^2), \quad k = 1, \dots, l \quad \text{für} \quad \xi \in \mathbb{C}^+$$

Ist  $\sigma \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im} \sigma > 0$ , so ist  $\sigma^2 \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ . Diese Zuordnung ist eineindeutig.

Wesentlich ist nun die Forderung

(3) "Anordnung der  $u_1, \dots, u_l$  nach Singularitätsgrad im Ursprung"

Die Anordnung wird in den Funktionen  $v_k(\sigma^2)$  ausgedrückt:

Zu jedem  $l$ -Tupel  $(m_1, \dots, m_l)$ ,  $0 \leq m_k \in \mathbb{Z}$ ,  $k = 1, \dots, l$  gibt es eine

Nullfolge  $(\sigma_n / n \in \mathbb{N}, \sigma_n \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im} \sigma_n > 0)$  und eine Permutation

$\pi$  der Zahlen  $\{1, \dots, l\}$ , so daß gilt:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sigma_n^{m_{\pi(k+1)}} v_{\pi(k+1)}(\sigma_n^2)}{\sigma_n^{m_{\pi(k)}} v_{\pi(k)}(\sigma_n^2)} = \sigma \quad \text{für } k = 1, \dots, l-1$$

Bemerkung 6: Sei  $\xi \in \mathbb{C}^+$  mit  $\xi^2 = 1$  und sei  $(\sigma_n / n \in \mathbb{N})$  eine Nullfolge mit  $\operatorname{Im} \sigma_n > 0$ , so definiert  $\xi_n := \sigma_n \xi$  eine Nullfolge  $(\xi_n / n \in \mathbb{N}) \subset \mathbb{C}^+$

Beweis:  $\xi_n = \sigma_n \xi \quad \wedge \quad \operatorname{Im} \xi_n = (\operatorname{Im} \sigma_n) \xi$

Nun gilt  $(\operatorname{Im} \xi_n)^0 = (\operatorname{Im} \sigma_n) \xi^0 > 0$ ,  $(\operatorname{Im} \xi_n)^2 = (\operatorname{Im} \sigma_n)^2 > 0$  w.z.z.w.

Satz (III.1): Unter den Voraussetzungen (1) bis (3) gibt es eine Zerlegung des Zustandes  $\phi_2(z, z+\xi) = \sum_{k=1}^l \phi_{2,k}(z, z+\xi) u_k(\xi)$  wobei die Zustände  $\phi_{2,k}(z, z+\xi)$  aus  $\mathcal{H}_2$  und holomorph für  $(z, \xi) \in \mathbb{C}^+ \times [\mathbb{C}^+ \cup \mathcal{U}_+(0)]$  sind.

Beweis:

a) Sei  $z \in \mathbb{C}^+$  fest gewählt. Dazu gibt es eine Kugel  $\mathcal{U}_\rho(0) \subset \mathbb{C}^+$  mit Radius  $\rho > 0$ , so daß für alle  $\psi \in \mathcal{H}_2$  die Funktionen  $\psi_{4,k}(z, z+\xi)(\psi)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{U}_\rho(0)$  sind. Daher gilt

$$\psi_{4,k}(z, z+\xi)(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^{n_1} \xi^{n_2} \alpha_{k, n_1, n_2}(\psi) \quad \text{und die Reihe konvergiert absolut für alle } \xi \in \mathcal{U}_\rho(0).$$

Ersetzt man  $\xi$  durch  $\sigma \xi$ ,  $\xi \in \mathbb{C}^+$  mit  $\xi^2 = 1$ , so erhält man:

$$\varphi_{4,k}(z, z+\sigma f)(\psi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma^m \{ \dots \}^{\mu_m} a_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z)(\psi)$$

b) Wegen der Annahmen (1) und (2) gilt für alle  $\psi \in \mathcal{H}_2$

$$(\psi, \phi_2(z, z+\sigma f)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} \sigma^m \varphi_k(\sigma^2) \{ \dots \}^{\mu_m} a_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z)(\psi)$$

Mit Annahme (3) und durch ähnliche Beweisführung wie im vorhergehenden Beispiel zeigt man die Beschränktheit der Funktionale  $\{ \dots \}^{\mu_m} a_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z)$ .

c) Wie im Anhang gezeigt wird, folgt aus Bemerkung 6 die Beschränktheit jedes einzelnen Termes  $a_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z)$ . Daher gibt es Zustände  $\phi_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z)$  so daß für alle  $\psi \in \mathcal{H}_2$   $(\psi, \phi_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z)) = a_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z)(\psi)$  gilt.

d) Da schwache und starke Holomorphie äquivalent sind, definiert der Ausdruck

$$\phi_{2,k}(z, z+f) = \sum_{m=0}^{\infty} \{ \dots \}^{\mu_m} \phi_{k, \mu_1, \dots, \mu_m}(z) \quad \text{eine}$$

holomorphe Funktion in  $f$  für jedes  $z \in \tau^+$ . Für festes  $f \in \tau^+ \cup \mathcal{U}_+(0)$  und für alle  $\psi \in \mathcal{H}_2$  ist  $(\psi, \phi_{2,k}(z, z+f)) = \varphi_{4,k}(z, z+f)(\psi)$  holomorph für  $z \in \tau^+$ . Das Theorem von Hartogs liefert nun die Holomorphie von  $\phi_{2,k}(z, z+f)$  für  $(z, f) \in \tau^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_+(0)]$ .

Damit ist Satz (III.1) bewiesen.

Dieser Satz ermöglicht es, von einer Zerlegung der Vierpunktfunktion  $W_4(\{f_1, \{f_2, \{f_3\})$  im Argument  $\{f_3$  auf eine Zerlegung der allgemeinen n-Punkt-Funktion  $W_n(\{f_1, \dots, \{f_{n-1})$  bezüglich des Arguments  $\{f_{n-1}$  zu schließen.

### III.3 Zerlegungen der Wightmanfunktion $W_{n+1}(\{f)$

In diesem Abschnitt werden die Zerlegungen der n-Punkt-Funktionen - ihre Existenz wird hier vorausgesetzt - näher untersucht. Der erste Teil umfaßt Definition und Eindeutigkeit von endlichen Zerlegungen. Im zweiten Teil wird dann der Begriff einer unendlichen Zerlegung präzisiert. Zum Abschluß werden die Ergebnisse zur Vergrößerung des Holomorphiegebietes verwendet.

#### 1) Endliche Zerlegungen:

Definition: Die Wightmanfunktion  $W_{n+1}(\{f)$  besitzt eine endliche Zerlegung im Argument  $\{f_n$ , wenn gilt:

$$W_{n+1}(\{f_0, \{f_n) = \sum_{k=1}^{\ell} G_k(\{f_0, \{f_n) u_k(\{f_n) \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

(Z1)  $u_k(\xi_n)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind lorentzinvariante, meromorphe Funktionen für  $\xi_n \in \tau^+$  mit der Symmetrie  $u_k(-\bar{\xi}_n) = \overline{u_k(\xi_n)}$

(Z2)  $G_k(\xi, \xi_n)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind holomorphe Funktionen für

$$(\xi, \xi_n) \in \mathcal{O} \supset \tau_{n-1}^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_r(0)]$$

(Z3) Seien  $f_1(\xi_n), \dots, f_l(\xi_n)$  meromorphe Funktionen für  $\xi_n \in \mathcal{U}(0)$

Dann gilt:

(Z3a) "Lineare Unabhängigkeit der  $u_1(\xi_n), \dots, u_l(\xi_n)$ "

$$\sum_{k=1}^l f_k(\xi_n) u_k(\xi_n) \equiv 0 \quad \text{für} \quad \xi_n \in \tau^+ \cap \mathcal{U}(0) \text{ } \wedge \text{ } f_k \equiv 0, \quad k = 1, \dots, l$$

(Z3b) "Lineare Unabhängigkeit der  $G_1(\xi, \xi_n), \dots, G_l(\xi, \xi_n)$ "

$$\sum_{k=1}^l f_k(\xi_n) G_k(\xi, \xi_n) \equiv 0 \quad \text{für} \quad (\xi, \xi_n) \in \mathcal{O} \text{ } \wedge \text{ } f_k \equiv 0, \quad k = 1, \dots, l$$

#### Bemerkungen:

1) Die Zerlegungen der n-Punkt-Funktionen sind in Analogie zu den Zerlegungen des Operatorproduktes  $A(z) A(z+\xi)$  in Kapitel I definiert. Bei vielen der nachfolgenden Behauptungen wird daher nur auf die entsprechenden Beweise aus dem ersten Kapitel verwiesen.

2) Besitzt  $W_{n+1}(\xi)$  eine Zerlegung im Argument  $\xi_n$ , so existiert auch eine Zerlegung im Argument  $\xi_1$ .

Beweis: Die Wightmanfunktionen besitzen die Symmetrie [13]

$$W_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \overline{W_{n+1}(-\bar{\xi}_n, \dots, -\bar{\xi}_1)}. \quad \text{Daraus folgt}$$

$$W_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{k=1}^l \overline{G_k(-\bar{\xi}_{n_1}, \dots, -\bar{\xi}_1)} \overline{u_k(-\bar{\xi}_1)} = \sum_{k=1}^l \overline{G_k(-\bar{\xi}_{n_1}, \dots, -\bar{\xi}_1)} u_k(\xi_1)$$

Setzt man  $G_k^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \overline{G_k(-\bar{\xi}_n, \dots, -\bar{\xi}_1)}$ , so erhält man

$$W_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{k=1}^l G_k^{(1)}(\xi_1, \dots, \xi_n) u_k(\xi_1) \quad \text{w.z.z.w.}$$

Folgerung 1: Die Funktionen  $G_k(\xi, \xi_n)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind invariant unter den Lorentztransformationen aus  $L_+(\mathbb{C})$  und lassen sich holomorph auf

$$\mathcal{O}' = \{ \wedge \xi \mid \xi \in \mathcal{O}, \wedge \in L_+(\mathbb{C}) \} \quad \text{fortsetzen.}$$

Beweis: siehe Abschnitt I.3c

Hilfssatz 1: Seien  $G_1(\xi, \xi_n), \dots, G_l(\xi, \xi_n)$  Funktionen, die die Bedingungen (Z2) und Z3b) erfüllen. Sei  $\mathcal{D} \subset \tau_{n-1}^+$  ein offenes Gebiet und sei definiert

$$D(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(l)} | \xi_n) := \begin{vmatrix} G_1(\xi^{(1)}, \xi_n) & \dots & G_l(\xi^{(1)}, \xi_n) \\ \vdots & & \vdots \\ G_1(\xi^{(l)}, \xi_n) & \dots & G_l(\xi^{(l)}, \xi_n) \end{vmatrix}, \quad \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(l)} \in \mathcal{D}$$

Dann gibt es Punkte  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(l)} \in \mathcal{D}$ , so daß

$$D(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(l)} | \xi_n) \neq 0 \quad \text{als Funktion von } \xi_n.$$

Beweis: siehe Abschnitt I.4 Bemerkung 5

Folgerung 2: Die Randwerte  $u_k(\xi + i0)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind Distributionen über  $\mathcal{D}(U_r(0))$ .

Beweis: Wie in Kapitel I bei Beweis von Hilfssatz 3 erhält man folgende Darstellung

$$u_k(\xi_n) = \frac{1}{D(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(l)} | \xi_n)} \begin{vmatrix} G_1(\xi^{(1)}, \xi_n) & \dots & W_{n+1}(\xi^{(1)}, \xi_n) & \dots & G_l(\xi^{(1)}, \xi_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ G_1(\xi^{(l)}, \xi_n) & \dots & W_{n+1}(\xi^{(l)}, \xi_n) & \dots & G_l(\xi^{(l)}, \xi_n) \end{vmatrix}$$

$\uparrow$   $k$ -te Spalte

Daraus folgen die Randwerteigenschaften der  $u_k(\xi + i0)$ . w.z.z.w.

Die Frage der Eindeutigkeit der Zerlegung der Wightmanfunktion  $W_{n+1}(\xi, \xi_n)$  wird durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz (III.2): (Eindeutigkeit der endlichen Zerlegungen)

Sei  $W_{n+1}(\xi, \xi_n) = \sum_{k=1}^l G_k(\xi, \xi_n) u_k(\xi_n)$  eine endliche Zerlegung mit den Eigenschaften (Z).

A) Sind Funktionen  $a_{ki}(\xi)$  und  $b_{ik}(\xi)$  für  $i, k = 1, \dots, l$  gegeben mit

$$\alpha) \quad a_{ki}, b_{ik} \text{ meromorph in } \tau^+ \cup U(0), U(0) \supset U_r(0)$$

β)  $a_{ki}, b_{ik}$  lorentzinvariant

$$\gamma) a_{ki}(-\xi) = \overline{a_{ki}(\xi)}, \quad b_{ik}(-\xi) = \overline{b_{ik}(\xi)}$$

$$\delta) \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik}(\xi) b_{kj}(\xi) = \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} b_{ik}(\xi) a_{kj}(\xi)$$

und gilt für  $i = 1, \dots, l$

$$\sum_{k=1}^{\ell} a_{ki}(\xi_n) G_k(\xi, \xi_n) \text{ holomorph in } \tau_{n-1}^+ \times [\tau^+ \cup U_F(0)]$$

so definiert

$$\psi_i(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\ell} b_{ik}(\xi_n) u_k(\xi_n), \quad H_i(\xi, \xi_n) = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ki}(\xi_n) G_k(\xi, \xi_n)$$

eine weitere Zerlegung  $W_{n+1}(\xi, \xi_n) = \sum_{i=1}^{\ell} H_i(\xi, \xi_n) \psi_i(\xi_n)$  mit den Eigenschaften (Z)

B) Sei  $W_{n+1}(\xi, \xi_n) = \sum_{i=1}^j H_i(\xi, \xi_n) \psi_i(\xi_n)$  eine Zerlegung, die ebenfalls den Bedingungen (Z) genügt. Dann gilt:

1)  $j = l$ ; d.h. beide Zerlegungen bestehen aus gleich vielen Termen

2) Es gibt Funktionen  $a_{ki}(\xi), b_{ik}(\xi)$  mit den Eigenschaften (α) bis (δ) so daß gilt:

$$u_k(\xi_n) = \sum_{i=1}^{\ell} a_{ki}(\xi_n) \psi_i(\xi_n), \quad \psi_i(\xi_n) = \sum_{k=1}^{\ell} b_{ik}(\xi_n) u_k(\xi_n)$$

$$G_k(\xi, \xi_n) = \sum_{i=1}^{\ell} b_{ik}(\xi_n) H_i(\xi, \xi_n), \quad H_i(\xi, \xi_n) = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ki}(\xi_n) G_k(\xi, \xi_n)$$

Beweis: siehe Satz (I.3) in Kapitel I.

## 2) Zerlegungen mit beliebig vielen Termen

Da die Zerlegbarkeit der Wightmanfunktion  $W_{n+1}(\xi, \xi_n)$  in endlich viele Terme möglicherweise eine zu große Einschränkung bedeutet, sollen nun noch allgemeinere Zerlegungen betrachtet werden.

Definition: Die Wightmanfunktion  $W_{n+1}(\xi, \xi_n)$  besitzt eine Zerlegung mit beliebig vielen Termen im Argument  $\xi_n$ , wenn gilt:

$$W_{n+1}(\xi, \xi_n) = \sum_{i \geq 1} H_i(\xi, \xi_n) v_i(\xi_n) \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

(Z1a)  $v_i(\xi_n)$  meromorph in  $\tau^+$ , lorentzinvariant und symmetrisch  
d.h.  $v_i(-\bar{\xi}_n) = \overline{v_i(\xi_n)}$ .

(Z1b) Sei  $P := \{ \xi \mid \xi \in \tau^+ \text{ mit } \frac{1}{v_i(\xi)} = 0 \text{ für ein } i \geq 1 \} \subset \tau^+$

"Menge der Polstellen in der Vorwärtsröhre  $\tau^+$ "

so ist  $j(\bar{P}) := \{ \xi^2 \mid \xi \in \bar{P} \} \subset \mathbb{C}$  abzählbar.

Z2)  $H_i(\xi, \xi_n)$  holomorph in  $\mathcal{H} \supset \tau_{n-1}^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_+(0)]$

(Z3a) Seien  $f_i(\xi_n)$  holomorph in  $\mathcal{U}(0)$  und gilt

$$\sum_{i \geq 1} f_i(\xi_n) v_i(\xi_n) = 0 \text{ für } \xi_n \in \tau^+ \cap \mathcal{U}(0), \text{ so ist } f_i(\xi_n) = 0.$$

(Z4) Die Konvergenz der unendlichen Reihen sei gleichmäßig in jedem kompakten Gebiet  $\mathcal{K} \subset \tau_{n-1}^+ \times [\tau^+ \setminus (\bar{P} \cap \tau^+)]$

Bemerkung 4: Die Forderungen (Z1b) und Z4) sind notwendig, da unendlich viele Terme bei der Summation auftreten können. Auf (Z3b) wird verzichtet, da hier kein Analogon zu Satz (III.2) angestrebt wird.

Hilfssatz 2: Seien zwei Zerlegungen der Funktion  $W_{n+1}(\xi, \xi_n)$  gegeben:

$$(1) \quad W_{n+1}(\xi, \xi_n) = \sum_{k=1}^l G_k(\xi, \xi_n) u_k(\xi_n) \quad \text{endliche Zerlegung}$$

$$(2) \quad W_{n+1}(\xi, \xi_n) = \sum_{i \geq 1} H_i(\xi, \xi_n) v_i(\xi_n) \quad \text{Zerlegung mit beliebig vielen Termen.}$$

Dann gibt es 1 linear unabhängige (im Sinne von (Z3b)) Funktionen  $H_{i_1}, \dots, H_{i_l}$  aus denen die Funktionen  $G_1, \dots, G_l$  durch Linearkombination dargestellt werden können.

Beweis:

a) Wie im Beweis von Satz (III.2) bzw. Satz (I.3) gilt:

$$u_k(\xi_n) = \sum_{i \geq 1} a_{ki}(\xi_n) v_i(\xi_n) \quad \text{mit der analogen Definition der Funktionen } a_{ki}(\xi_n) = \frac{D_{k,i}}{D}(\xi_n)$$

$$\begin{aligned} \text{b) Aus } \sum_{k=1}^l G_k(\xi, \xi_n) u_k(\xi_n) &= \sum_{i \geq 1} \left\{ \sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi_n) G_k(\xi, \xi_n) \right\} v_i(\xi_n) \text{ folgt} \\ H_i(\xi, \xi_n) &= \sum_{k=1}^l a_{ki}(\xi_n) G_k(\xi, \xi_n), \quad i \geq 1 \quad \text{wegen (Z3a).} \end{aligned}$$

Daher sind je  $l+1$  Funktionen  $H_i$  linear abhängig.

Beh: Es gibt 1 linear unabhängige Funktionen  $H_{i_1}, \dots, H_{i_1}$

Beweis: Seien  $m \leq l$  Funktionen  $H_i$  linear unabhängig - durch Umbenennen etwa  $H_1, \dots, H_m$  - aber je  $m+1$  Funktionen linear abhängig. Daraus folgt

$$E(f_n) := \begin{vmatrix} a_{11}(f_n) & \dots & a_{m1}(f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m}(f_n) & \dots & a_{mm}(f_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{eventuell durch Umordnen der } G_1, \dots, G_l !)$$

Für  $i = 1, \dots, m$  sei definiert

$$\hat{H}_i(\xi, f_n) := \begin{vmatrix} a_{11}(f_n) & \dots & H_1(\xi, f_n) & \dots & a_{m1}(f_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}(f_n) & \dots & H_m(\xi, f_n) & \dots & a_{mm}(f_n) \end{vmatrix}$$

↑ i-te Spalte

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(f_n) & \dots & \sum_{k=1}^l a_{k1}(f_n) G_k(\xi, f_n) & \dots & a_{m1}(f_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}(f_n) & \dots & \sum_{k=1}^l a_{km}(f_n) G_k(\xi, f_n) & \dots & a_{mm}(f_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}(f_n) & \dots & a_{m1}(f_n) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m}(f_n) & \dots & a_{mm}(f_n) \end{vmatrix} G_i(\xi, f_n)$$

$$+ \sum_{k=m+1}^l \begin{vmatrix} a_{11}(f_n) & \dots & a_{k1}(f_n) & \dots & a_{m1}(f_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}(f_n) & \dots & a_{km}(f_n) & \dots & a_{mm}(f_n) \end{vmatrix} G_k(\xi, f_n)$$

Damit erhält man folgende Darstellung der  $H_i(\xi, f_n)$

$$H_i(\xi, f_n) = \frac{1}{E(f_n)} \sum_{k=1}^m a_{ki}(f_n) \hat{H}_k(\xi, f_n), \quad i \geq 1$$

Diese Gleichung ist trivial für  $i = 1, \dots, m$  und für  $i \geq m+1$  folgt sie aus der linearen Abhängigkeit von je  $m+1$  Funktionen  $H_k$ .

Für die Wightmanfunktion ergibt dies folgende Zerlegung

$$\begin{aligned} W_{m+1}(\xi, \xi_m) &= \sum_{i \geq 1} H_i(\xi, \xi_m) v_i(\xi_m) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{E(\xi_m)} \hat{H}_k(\xi, \xi_m) \cdot \underbrace{\sum_{i \geq 1} a_{ki}(\xi_m) v_i(\xi_m)}_{= u_k(\xi_m)} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{E(\xi_m)} \hat{H}_k(\xi, \xi_m) u_k(\xi_m) \\ &= \sum_{k=1}^l G_k(\xi, \xi_m) u_k(\xi_m) \end{aligned}$$

Nach Satz (III.2) muß daher  $m = 1$  sein.

c) Dies liefert folgende Darstellung der  $G_k(\xi, \xi_n)$

$$G_k(\xi, \xi_n) = \frac{1}{E(\xi_n)} \begin{vmatrix} a_{11}(\xi_n) & \dots & H_1(\xi, \xi_n) & \dots & a_{l1}(\xi_n) \\ \vdots & & & & \\ a_{1k}(\xi_n) & \dots & H_k(\xi, \xi_n) & \dots & a_{lk}(\xi_n) \end{vmatrix}$$

$\uparrow$   $k$ -te Spalte

Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Die Ausführungen dieses Abschnitts waren bisher ohne enge Verknüpfung zu den anderen Teilen dieses Kapitels. Im folgenden sollen diese Überlegungen zur Erweiterung des Holomorphiegebietes der Funktionen  $G_k(\xi, \xi_n)$  herangezogen werden.

### 3) Anwendung:

Die Wightmanfunktion  $W_{n+1}(\xi)$  besitze

(1) eine endliche Zerlegung im letzten Argument

$$W_{n+1}(\xi, \xi_n) = \sum_{k=1}^l G_k(\xi, \xi_n) u_k(\xi_n) \quad \text{und}$$

(2) eine beliebige Zerlegung im Argument  $\xi_j$

$$W_{n+1}(\xi, \xi_j, \vec{\xi}) = \sum_{i \geq 1} H_i(\xi, \xi_j, \vec{\xi}) v_i(\xi_n)$$

Zur Formulierung des Satzes werden noch folgende Bezeichnungen benötigt:

$\pi$  sei die Permutation  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & j-2 & j-1 & j & \dots & n \\ 0 & 1 & \dots & j-2 & j+1 & j+2 & \dots & nj-1 & j \end{pmatrix}$

$\underline{z} = (z_0, \dots, z_n) \quad \& \quad \underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$  mit  $f_i := z_i - z_{i-1}$

$\underline{z}_\pi = (z_{\pi(0)}, \dots, z_{\pi(n)}) = (z_0, \dots, z_{j-2}, z_{j+1}, \dots, z_n, z_{j-1}, z_j)$

dazu gehört

$$f_\pi = (f_1, \dots, f_{j-2}, f_{j-1} + f_j + f_{j+1}, f_{j+2}, \dots, f_n, - \sum_{m=j}^n f_m, f_j)$$

$$f \in \mathcal{O}_\pi : \nexists f_\pi \in \mathcal{O}$$

$$\hat{G}_k(f) := G_k(f_\pi) \quad \text{ist holomorph f\u00fcr } f \in \mathcal{O}_\pi$$

Satz (III.3): Die Funktionen  $\hat{G}_k(f)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind holomorph  
f\u00fcr  $f = (f_j, f_j, \vec{f}) \in \hat{\mathcal{O}} \supset \tau_{j-1}^+ \times [\tau^+ \cup \hat{\mathcal{U}}_r(0)] \times \tau_{n-j}^+$

Beweis:

$$a) \quad W_{n+1}(f) = \sum_{i \geq 1} H_i(f) v_i(f_j) \text{ holomorph f\u00fcr } f \in \tau_n^+$$

und au\u00dferdem wegen der Symmetrie von  $W_{n+1}(f)$ :

$$W_{n+1}(f) = \sum_{k=1}^l \hat{G}_k(f) u_k(f_j) \text{ holomorph f\u00fcr } f \in \tau_{n,\pi}^+ (\nexists f_\pi \in \tau_n^+)$$

f\u00fcr  $f \in \tau_n^+ \cap \tau_{n,\pi}^+$  gilt daher

$$\sum_{k=1}^l \hat{G}_k(f) u_k(f_j) = \sum_{i \geq 1} H_i(f) v_i(f_j)$$

b) Sei nun  $f_j \in \tau^+$ . Dazu gibt es nach Anhang B offene Gebiete

$$\mathcal{U}_1 \subset \tau_{j-1}^+, \quad \mathcal{U}_2 \subset \tau_{n-j}^+ \quad \text{und } \forall c \in \mathbb{C}^+ \text{ mit } \{\alpha f_j \mid \alpha \in [0,1]\} \subset V$$

so da\u00df gilt:  $\mathcal{U}_1 \times V \times \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{O}_\pi \cap \mathcal{O}_\pi'$

Nach Hilfssatz 1 gibt es Punkte  $(f_j^{(1)}, \vec{f}^{(1)}), \dots, (f_j^{(l)}, \vec{f}^{(l)}) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$

$$\text{so da\u00df} \quad D(f_j) := \begin{vmatrix} \hat{G}_1(f_j^{(1)}, f_j, \vec{f}^{(1)}) & \dots & \hat{G}_l(f_j^{(1)}, f_j, \vec{f}^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{G}_1(f_j^{(l)}, f_j, \vec{f}^{(l)}) & \dots & \hat{G}_l(f_j^{(l)}, f_j, \vec{f}^{(l)}) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ f\u00fcr } f_j \in V$$

$$\text{Sei} \quad a_{ki}(f) := \frac{1}{D(f_j)} \begin{vmatrix} \hat{G}_1(f_j^{(1)}, f_j, \vec{f}^{(1)}) & \dots & H_i(f_j^{(1)}, f_j, \vec{f}^{(1)}) & \dots & \hat{G}_l(f_j^{(1)}, f_j, \vec{f}^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{G}_1(f_j^{(l)}, f_j, \vec{f}^{(l)}) & \dots & H_i(f_j^{(l)}, f_j, \vec{f}^{(l)}) & \dots & \hat{G}_l(f_j^{(l)}, f_j, \vec{f}^{(l)}) \end{vmatrix}$$

$\hat{=}$  k-te Spalte

Dann gilt wie in Hilfssatz 2

$$u_k(\xi_j) = \sum_{i=1}^l u_{ki}(\xi_j) v_i(\xi_j), \quad H_i(\xi) = \sum_{k=1}^l u_{ki}(\xi_j) \hat{G}_k(\xi) \quad \text{für } \xi \in \mathcal{U}_1 \times V \times \mathcal{U}_2$$

und es gibt 1 linear unabhängige  $H_1(\xi) - \text{etwa } H_1(\xi), \dots, H_l(\xi)$ .

Daraus können die  $G_k(\xi)$  ausgerechnet werden. Für  $\xi \in \mathcal{U}_1 \times V \times \mathcal{U}_2$  gilt:

$$\hat{G}_k(\xi) = \frac{1}{D(\xi_j)} \begin{vmatrix} a_{11}(\xi_j) & \dots & H_1(\xi) & \dots & a_{1l}(\xi_j) \\ \vdots & & & & \\ a_{le}(\xi_j) & \dots & H_l(\xi) & \dots & a_{le}(\xi_j) \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^l b_{ki}(\xi_j) H_i(\xi)$$

Diese Gleichung kann nun fortgesetzt werden zu allen  $\xi \in (\tau_{j-1}^+ \times V \times \tau_{n-j}^+) \cap \mathcal{U}_j$

- c) Zur weiteren Vergrößerung des Holomorphiegebietes beginnt man mit einem anderen Punkt  $\xi_j' \in \tau^+$ . Dazu gibt es ebenfalls Umgebungen  $U_1', U_2'$  und  $V'$  mit den Eigenschaften wie in (b). Da  $0 \in V$  und  $0 \in V'$  ist  $V \cap V'$  eine Umgebung von 0. Für  $\xi_j \in V \cap V'$  gilt nun

$$0 = u_k(\xi_j) - u_k(\xi_j) = \sum_{i=1}^l \{a_{ki}(\xi_j) - a'_{ki}(\xi_j)\} v_i(\xi_j)$$

Daraus folgt  $a_{ki}(\xi_j) = a'_{ki}(\xi_j)$  für  $\xi_j \in V \cap V'$

Führt man dieses Verfahren für alle  $\xi_j \in \tau^+$  durch, so ergibt sich die Meromorphie der  $a_{ki}(\xi_j)$  in  $\tau^+ \cup U(0)$ .

Also ist  $\hat{G}_k(\xi)$  holomorph für  $\xi \in \hat{\mathcal{G}} \supset \tau_{j-1}^+ \times [\tau^+ \cup U(0)] \times \tau_{n-j}^+ \cap \mathcal{U}_j$

w.z.z.w.

Der Satz (III.3) liefert die Holomorphie von  $G_k(\xi)$  in einer permutierten Röhre, falls eine Zerlegung von  $W_{n+1}(\xi)$  in dieser Röhre existiert. Er wird im nächsten Abschnitt dazu benutzt, um von einer Zerlegung der Funktion  $W_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n)$  im Argument  $\xi_n$  auf eine Zerlegung bezüglich des Argumentes  $\xi_j, j = 1, \dots, n-1$  zu schließen.

#### III.4 Eine Zerlegung des Operatorproduktes $A(z) A(z+\xi)$

Nachdem in den Abschnitten III.2 und III.3 alle nötigen Hilfsmittel bereitgestellt wurden, ist es nun leicht, Kriterien für eine Operatorproduktentwicklung anzugeben.

Ausgangspunkt ist eine Zerlegung der Vierpunktfunktion

$$(A) \quad W_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{k=1}^l G_{4,k}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_k(\xi_3)$$

mit den Eigenschaften

- (1)  $u_k(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind lorentzinvariante, meromorphe Funktionen in  $\tau^+$  mit der Symmetrie  $u_k(-\bar{\xi}) = \overline{u_k(\xi)}$
- (2)  $G_{4,k}(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  sind holomorphe Funktionen in  $\mathcal{G} \supset \tau_2^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_+(0)]$
- (3) Die Funktionen  $G_{4,1}(\xi), \dots, G_{4,l}(\xi)$  sind linear unabhängig in folgendem Sinn:

Sind  $f_1(\xi), \dots, f_l(\xi)$  meromorphe Funktionen in  $U(0)$

und gilt  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi_3) G_{4,k}(\xi)$  für  $\xi \in \mathcal{G} \cap (\tau_2^+ \times \mathcal{U}(0))$

so folgt  $f_k \equiv 0$ ,  $k = 1, \dots, l$ .

Für eine Zerlegung des Zustandes  $\Phi_2(z, z^+)$  sind weitere Annahmen erforderlich. Zuvor noch einige

#### Bezeichnungen

- a)  $\mathcal{G}_{4,k}(z, z+\xi)(\Psi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  seien die durch  $G_{4,k}(\xi)$  induzierten Funktionale auf  $\mathcal{J}_2$ . (siehe III.2 Bemerkung 1).
- b) Zu den Funktionen  $u_k(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  gibt es Funktionen  $v_k$ ,  $k = 1, \dots, l$  meromorph in  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  mit  $u_k(\xi) = v_k(\xi^2)$ .

(B) Es soll gelten

- (1) Für alle  $\Psi \in \mathcal{H}_2$  sind die Funktionen  $\mathcal{G}_{4,k}(z, z+\xi)(\Psi)$ ,  $k = 1, \dots, l$ , holomorph für  $(z, \xi) \in \hat{\mathcal{G}} \supset \tau^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_+(0)]$

- (2) "Anordnung der Funktionen  $v_1, \dots, v_l$ "

Zu jedem 1-Tupel  $(m_1, \dots, m_l)$ ,  $0 \leq m_k \in \mathbb{Z}$  gibt es eine Nullfolge  $(\delta_m | m \in \mathbb{N}, \delta_m \in \mathbb{C}, \exists m \delta_m > 0)$  und eine Permutation  $\pi \in \mathcal{S}_l$ , so daß gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\delta_m^{\pi(k_{l+1})} \cdot v_{\pi(k_{l+1})}(\delta_m^2)}{\delta_m^{m_{\pi(k)}} \cdot v_{\pi(k)}(\delta_m^2)} = 0, \quad k=1, \dots, l-1$$

Um das Ziel - nämlich die Zerlegung des Zustandes  $\Phi_m(z_1, \dots, z_m)$  in

$\Phi_m(z_1, \dots, z_m) = \sum_{k=1}^l \Phi_{m,k}(z_1, \dots, z_m) u_k(z_2 - z_1)$  mit Vektoren  $\Phi_{m,k}(\underline{z})$ , die holomorph für  $z_2 = z_1$  sind - zu erreichen, wird weiterhin gefordert

(C) Zu  $m = 3, 4, \dots$  gibt es eine beliebige Zerlegung der Wightmanfunktion

$W_{2m}(\xi_1, \dots, \xi_{2m-1})$  bezüglich des Argumentes  $\xi_{m+1}$  in

$$W_{2m}(\xi) = \sum_{i=1}^m H_{2m,i}(\xi) v_{2m,i}(\xi_{m+1}) \quad \text{mit den Eigenschaften}$$

(1)  $v_{2m,i}(\xi)$  lorentzinvariant, meromorph in  $\tau^+$  mit der Symmetrie

$$v_{2m,i}(-\xi) = \overline{v_{2m,i}(\xi)}$$

(2)  $H_{2m,i}(\xi) = H_{2m,i}(\xi, \xi_{m+1}, \vec{\xi})$  holomorph für

$$(\xi_1, \xi_{m+1}, \vec{\xi}) \in \mathcal{H}_{2m} \subset \tau_m^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_+(0)] \times \tau_{m-2}^+$$

(3) Sind  $f_i(\xi)$  holomorph in  $\mathcal{U}(0)$  und gilt  $\sum_{i=1}^m f_i(\xi) v_{2m,i}(\xi) = 0$  für alle  $\xi \in \tau^+ \cap \mathcal{U}(0)$ , so sind alle  $f_i \equiv 0$ .

(4) Treten unendlich viele Terme auf, so sei die Verteilung der Polstellen und die Konvergenz der Reihe wie in III.3 Teil 2 beschrieben.

#### Bezeichnung:

c) Genau wie  $G_{4,k}(\xi)$  das Funktional  $\mathcal{G}_{4,k}(z, z+\xi)(\Psi)$  für  $\Psi \in \mathcal{I}_2$  induziert, gibt auch  $H_{2m,i}(\xi)$  Anlaß zu dem Funktional

$$\mathcal{H}_{2m,i}(z, z+\xi_1, \dots, z+\xi_1+\dots+\xi_{m-1})(\Psi) \quad \text{für} \quad \Psi \in \mathcal{I}_m$$

(5) Für  $\Psi \in \mathcal{H}_m = \overline{\mathcal{I}_m}$  ist  $\mathcal{H}_{2m,i}(z, \dots, z+\xi_1+\dots+\xi_{m-1})(\Psi)$  holomorph falls  $(z, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in \mathcal{H}_2 \subset \tau^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_+(0)] \times \tau_{m-2}^+$

Satz (III.4): Unter den Voraussetzungen (A), (B) und (C) existiert eine endliche Zerlegung des Operatorprodukts  $A(z) A(z+\xi)$  in

$$A(z) A(z+\xi) = \sum_{k=1}^l B_k(z, \xi) u_k(\xi)$$

mit Definitionsbereich  $\mathcal{I}_2$ . Für  $\Phi \in \mathcal{I}_2$  ist der Vektor  $B_k(z, \xi) \Phi$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{U}_\Phi(0)$ .

#### Beweis:

a) Die Voraussetzungen (A) und (B) ermöglichen es den Satz (III.1) anzuwenden. Er liefert eine Zerlegung des Zustandes  $\Phi_2(z, z+\xi)$  in

$$\Phi_2(z, z+\xi) = \sum_{k=1}^l \Phi_{2,k}(z, z+\xi) u_k(\xi) \quad \text{mit} \quad \Phi_{2,k}(z, z+\xi) \in \overline{\mathcal{I}_2}.$$

b) Bildet man das Skalarprodukt von  $\Phi_2(z_{n-1}, z_n)$  mit  $\Phi_{n-1}(\bar{z}_{n-1}, \dots, \bar{z}_0)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{n+1}(z_0, \dots, z_n) &= (\phi_{n-1}(\bar{z}_{n-2}, \dots, \bar{z}_0), \phi_2(z_{n-1}, z_n)) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} (\phi_{n-1}(\bar{z}_{n-2}, \dots, \bar{z}_0), \phi_{2,k}(z_{n-1}, z_n)) u_k(z_n - z_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} \mathcal{Y}_{n+1,k}(z_0, \dots, z_n) u_k(z_n - z_{n-1}) \end{aligned}$$

- c) Die Annahme (B2) impliziert die lineare Unabhängigkeit der  $u_1(\xi), \dots, u_1(\xi)$ , da aus

$$\sum_{k=1}^{\ell} t_k(\xi) u_k(\xi) \equiv 0, \quad f_k(\xi) \text{ holomorph in } U(0), \text{ folgt}$$

$$\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} t_k(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0 \quad \text{für alle } \mu_1, \dots, \mu_n = 0, 1, 2, 3 \text{ und } n = 0, 1, 2, \dots$$

Dies bedeutet  $f_k \equiv 0, k = 1, \dots, 1$

W.Z.Z.W.

- d) Die lineare Unabhängigkeit der  $u_1, \dots, u_1$  hat die Translationsinvarianz der Funktionen  $\mathcal{Y}_{n+1,k}(\underline{z})$  zur Folge. Daher gibt es Funktionen  $G_{n+1,k}(\underline{\xi}), k = 1, \dots, 1$ , so daß gilt:

$$\mathcal{Y}_{n+1,k}(\underline{\xi}) = \mathcal{Y}_{n+1,k}(\underline{z}) \quad \text{mit } \underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \text{ und } \xi_i = z_i - z_{i-1}$$

Dies führt zur Zerlegung

$$\mathcal{W}_{n+1}(\underline{\xi}) = \sum_{k=1}^{\ell} G_{n+1,k}(\underline{\xi}) u_k(\xi_n)$$

- e) Insbesondere für  $n+1 = 2m, m = 2, 3, 4, \dots$  gilt

$$\mathcal{W}_{2m}(\underline{\xi}) = \sum_{k=1}^{\ell} G_{2m,k}(\underline{\xi}) u_k(\xi_{2m-1})$$

Um nun den Satz (III.3) anwenden zu können, benötigt man noch

Beh: Für  $m = 2, 3, 4, \dots$  sind die Funktionen

$$G_{2m,1}(\underline{\xi}), \dots, G_{2m,1}(\underline{\xi}) \text{ linear unabhängig}$$

Beweis durch Induktion:

Für  $m = 2$  ist dies die Voraussetzung (A3)

Seien  $G_{2m,1}(\underline{\xi}), \dots, G_{2m,1}(\underline{\xi})$  linear unabhängig und sei

$$\sum_{k=1}^{\ell} t_k(\xi_{2m+1}) G_{2m+2,k}(\underline{\xi}) \equiv 0 \quad \text{für } \underline{\xi} \in \tau_{2m}^+ \times [\tau^+ \cup \mathcal{U}_r(0)]$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\ell} t_k(\xi) \mathcal{Y}_{2m+2,k}(\bar{z}_{2m}, \dots, \bar{z}_1, z, z+\xi) \equiv 0 \equiv \sum_{k=1}^{\ell} t_k(\xi) (\phi_{2m}(z_1, \dots, z_{2m}), \phi_{2,k}(z, z+\xi))$$

Dies impliziert nun  $(\phi \cdot \sum_{k=1}^l f_k(\xi) \phi_{k,k}(z, z+\xi)) \equiv 0$  für alle  $\phi \in \mathcal{H}_{2m}$ , ja sogar für alle  $\phi \in \overline{\mathcal{H}_{2m}} = \overline{\mathcal{H}_{2m}}$ . Da nach Anhang A zu Kap. I gilt  $H_{2m} \supset H_{2m-2} = \overline{\mathcal{H}_{2m-2}}$  folgt daraus  $\sum_{k=1}^l f_k(\xi_{2m-1}) G_{2m,k}(\xi) = 0$ . Nach Annahme zieht dies  $f_k \equiv 0$  nach sich. w.z.z.w.

f) Die Voraussetzungen (C1) bis (C4) zusammen mit Satz (III.3) liefern nun eine Erweiterung des Holomorphiegebietes der Funktionen  $G_{2m,k}(\xi)$  in die Röhre, die zur Permutation

$$\pi_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m & m+1 & \dots & 2m-2 & 2m-1 \\ 0 & 1 & & 2m-2 & 2m-1 & & m & m+1 \end{pmatrix} \text{ gehört. Definiert man}$$

$\hat{G}_{2m,k}(\xi) := G_{2m,k}(\xi \pi_{2m})$ , so ist die Funktion  $\hat{G}_{2m,k}(\xi)$  holomorph für  $\xi \in \mathcal{U}_{2m-1}^+$  und zusätzlich noch für  $\xi_{m+1} \in \hat{\mathcal{U}}_r(0)$  falls  $(\xi_1 \dots \xi_m, \xi_{m+2} \dots \xi_{2m-1}) \in \mathcal{U}_{2m-2}^+$

g) Sei  $\hat{\mathcal{G}}_{2m,k}(z_0, \dots, z_{2m-1}) := \hat{G}_{2m,k}(\xi)$  mit  $\xi_i = z_i - z_{i-1}$

Diese Funktionen führen zu folgender Zerlegung der Wightmanfunktion

$$\mathcal{W}_{2m}(z_0, \dots, z_{2m-1}) = \sum_{k=1}^l \hat{\mathcal{G}}_{2m,k}(z_0, \dots, z_{2m-1}) u_k(z_{m+1} - z_m)$$

Die dadurch auf dem Raum  $J_m = L(\{\phi_m(z_1, \dots, z_m) \mid z_1, z_2 - z_1, \dots, z_m - z_{m-1} \in \mathcal{U}^+\})$  induzierten antilinearen Funktionale werden mit

$\hat{\mathcal{G}}_{2m,k}(z, z + \xi_1, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1})(\psi)$  bezeichnet. Sie sind holomorph für  $z \in \mathcal{U}^+$ ,  $(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}) \in [\mathcal{U}^+ \cup \hat{\mathcal{U}}_r(0)] \times \mathcal{U}_{m-2}^+$

h) Da nach Satz (III.3) die Funktionen  $\hat{G}_{2m,k}(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  durch die Funktionen  $H_{2m,k}(\xi)$ ,  $k = 1, \dots, l$  ausgedrückt werden können, lassen sich wegen Voraussetzung (C5) die Funktionale  $G_{2m,k}(z, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1})$  auf  $\mathcal{H}_m = \overline{\mathcal{H}_m}$  fortsetzen und sind weiterhin holomorph.

Für  $\psi \in \mathcal{H}_m$  gilt also:

$$(\psi, \phi_m(z, z + \xi_1, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1})) = \sum_{k=1}^l \hat{\mathcal{G}}_{2m,k}(z, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1})(\psi) u_k(\xi_1)$$

Durch eine Beweisführung wie in Satz (III.1) zeigt man die Beschränktheit der Funktionale  $\hat{\mathcal{G}}_{2m,k}(z, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1})$  und gelangt zur Zerlegung

$$\phi_m(z, z + \xi_1, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1}) = \sum_{k=1}^l \phi_{m,k}(z, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1}) u_k(\xi_1)$$

wobei die Vektoren  $\phi_{m,k}(z, z + \xi_1, \dots, z + \xi_1 + \dots + \xi_{m-1})$  holomorph für  $z \in \mathcal{U}^+$

und  $(\{_{A_1}, \dots, \{_{m-1}\}) \in [\mathcal{T}^+ \cup U_r(0)] \times \mathcal{T}_{m-2}^+$  sind. Dies gilt für  $m = 2, 3, \dots$

i) Definiert man nun für  $z \in \mathcal{T}^+$ ,  $\{ \in \mathcal{T}^+ \cup U_r(0)$  und für

$\Phi_{m-2}(z_1, \dots, z_{m-2})$  mit  $z_1, z \in \mathcal{T}^+$ ,  $z_1 - z \in \mathcal{T}^+$

$$B_k(z, \{) \Phi_{m-2}(z_1, \dots, z_{m-2}) := \Phi_{m,k}(z, z + \{, z_1, \dots, z_{m-2})$$

so erhält man eine Zerlegung des Operatorproduktes

$$A(z) A(z + \{) = \sum_{k=1}^{\ell} B_k(z, \{) u_k(\{)$$

mit Definitionsbereich  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{H}$  und den angegebenen Holomorphieeigenschaften.  
w.z.z.w.

Damit ist das Ziel erreicht, aus der Zerlegung der Vierpunktfunktion  $W_4(\{_1, \{_2, \{_3) = \sum_{k=1}^{\ell} G_{4,k}(\{_1, \{_2, \{_3) u_k(\{_3)$  eine Zerlegung des Produktes zweier Feldoperatoren  $A(z)A(z + \{) = \sum_{k=1}^{\ell} B_k(z, \{) u_k(\{)$  abzuleiten, wenn man auch ehrlicherweise zugeben muß, daß die dafür notwendigen Voraussetzungen sehr stark sind. Besonders restriktiv erscheint die Forderung, daß alle geraden  $2n$ -Punktfunktionen eine - wenn auch beliebige - Zerlegung im Argument  $\{_{n+1}$  besitzen müssen. Die zukünftigen Überlegungen werden sich daher auf diesen Punkt konzentrieren mit dem Ziel, diese Forderung abzuschwächen oder aber zu zeigen, daß sie stets erfüllt ist.

## Anhang A

### Bezeichnungen

- 1)  $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$  seien symmetrische Tensoren  
 2) Sei  $\{\vec{\alpha}\} := \left( \frac{1+\vec{\alpha}^2}{\vec{\alpha}} \right) \in V^+$  für  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$  mit  $|\vec{\alpha}| < 1$   $\left\{ \begin{array}{l} \{\vec{\alpha}\} = 1 \end{array} \right.$

### Hilfssatz:

$$\sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \\ \mu_1 + \dots + \mu_n = n}} \{\vec{\alpha}\}^{\mu_1} \dots \{\vec{\alpha}\}^{\mu_n} = 0 \quad \text{für } |\vec{\alpha}| < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} F_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0 \end{array} \right.$$

### Beweis:

- a) Seien  $e_0, e_1, e_2, e_3$  die vier Einheitsvektoren  
 Für  $0 \leq k, l, m$  mit  $k+l+m \leq n$  sei  $S(k, l, m)$  das symmetrisierte  
 Tensorprodukt von  $e_1^{\otimes k} \otimes e_2^{\otimes l} \otimes e_3^{\otimes m} \otimes e_0^{\otimes n-(k+l+m)}$

Diese Einheitstensoren bilden eine Basis für die symmetrischen Tensoren

$F_{\mu_1 \dots \mu_n}$ . Daher genügt es zu zeigen

$$\sum_{\substack{\mu_1, \dots, \mu_n \\ \mu_1 + \dots + \mu_n = n}} S(k, l, m)^{\mu_1 \dots \mu_n} F_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0$$

b)  $[\{\vec{\alpha}\}]^{\otimes m} := \{\vec{\alpha}\} \otimes \dots \otimes \{\vec{\alpha}\}$

Beh: Für  $0 \leq k, l, m$  mit  $k+l+m \leq n$  gilt

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \frac{\partial^l}{\partial x_2^l} \frac{\partial^m}{\partial x_3^m} [\{\vec{\alpha}\}]^{\otimes m} \right|_{\vec{\alpha}=0} = \frac{m!}{(n-k-l-m)!} S(k, l, m) + \sum_{k'+l'+m' < k+l+m} c(k', l', m') S(k', l', m')$$

### Beweis:

$$\{\vec{\alpha}\} = \left( \frac{1+\vec{\alpha}^2}{\vec{\alpha}} \right) = \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right) + \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) (1+\vec{\alpha}^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \gamma [\{\vec{\alpha}\}]^{\otimes m} &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} S\{e_0^{\otimes j} \otimes \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)^{\otimes m-j}\} (1+\vec{\alpha}^2 - 1)^j \\ &= \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)^{\otimes m} + m S\{e_0 \otimes \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)^{\otimes m-1}\} (1+\vec{\alpha}^2 - 1) + \dots + e_0^{\otimes m} (1+\vec{\alpha}^2 - 1)^m \end{aligned}$$

da  $e_0 = \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right)$ ,  $e_1 = \frac{1}{2} x_1 \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)$ ,  $e_2 = \frac{1}{2} x_2 \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)$ ,  $e_3 = \frac{1}{2} x_3 \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)$  folgt

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \frac{\partial^l}{\partial x_2^l} \frac{\partial^m}{\partial x_3^m} \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)^{\otimes m} \right|_{\vec{\alpha}=0} = \frac{m!}{(n-k-l-m)!} S(k, l, m) \quad \text{und}$$

$$\left. \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \frac{\partial^l}{\partial x_2^l} \frac{\partial^m}{\partial x_3^m} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (1+\vec{\alpha}^2 - 1) S\{e_0^{\otimes j} \otimes \left( \frac{1}{\vec{\alpha}} \right)^{\otimes m-j}\} \right|_{\vec{\alpha}=0} = \sum_{k'+l'+m' < k+l+m} c(k', l', m') S(k', l', m')$$

c) Da  $\sum_{\mu_1}^{u_1} \dots \sum_{\mu_n}^{u_n} F_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0$  folgt  $(\partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_2}^{k_2} \partial_{x_3}^{k_3} [\sum_{\mu_1}^{u_1} \dots \sum_{\mu_n}^{u_n} F_{\mu_1 \dots \mu_n}]) = 0$

Durch successives Anwenden von (b) folgt daraus

$$\bigwedge_{k, l, m} S(k, l, m)^{\mu_1 \dots \mu_n} F_{\mu_1 \dots \mu_n} = 0 \quad \text{v.z.z.w.}$$

Satz: Gilt für alle  $|\vec{\alpha}| < 9$  :  $\sum_{\mu_1}^{u_1} \dots \sum_{\mu_n}^{u_n} F_{\mu_1 \dots \mu_n} = G(\vec{\alpha})$   
so sind die symmetrischen Tensoren  $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$  eindeutig bestimmt.

Beweis: klar, da das homogene Gleichungssystem nur den Nulltensor als symmetrische Lösung hat.

Korollar: Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und für alle  $\psi \in \mathcal{H}$  gelte

$$\sum_{\mu_1}^{u_1} \dots \sum_{\mu_n}^{u_n} F_{\mu_1 \dots \mu_n}(\psi) = G(\vec{\alpha})(\psi), \quad \text{wobei } F_{\mu_1 \dots \mu_n} \text{ und } G(\vec{\alpha})$$

lineare Funktionale auf  $\mathcal{H}$  sind.

Ist  $G(\vec{\alpha})$  ein beschränktes Funktional, so auch  $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$ .

Beweis: Nach Satz kann man die  $F_{\mu_1 \dots \mu_n}$  als Linearkombination geeigneter  $G(\vec{\alpha}_i)$  schreiben. Daraus folgt die Behauptung.

# Anhang B

Satz: Zu  $\xi \in \mathcal{T}^+$  gibt es  $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n \in \mathcal{T}^+$ , so daß für alle  $\xi_j \in \{\alpha \xi \mid \alpha \in [0,1]\}$  gilt:

$$\xi_1, \dots, \xi_{j-2}, \xi_{j-1} + \xi_j + \xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n - \sum_{m=1}^n \xi_m \xi_j \in (\mathcal{T}_{n-1}^+ \times [\mathcal{T}^+ \cup \{0\}])'$$

Der Beweis geschieht in mehreren Schritten:

a) Sei  $\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & 0 & \cosh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  ist  $\Lambda(t)$  eine komplexe Lorentztransformation und  $\Lambda(0) = E$

Zu  $\Lambda(t)$ ,  $0 < t < \frac{\pi}{2}$  gibt es  $\xi \in \mathcal{T}^+$  mit

Beweis: Wähle  $\xi = -2 \frac{\cosh t}{\sinh t}$

$$\Lambda(t) \xi = -2 \frac{\cosh t}{\sinh t} \begin{pmatrix} \sinh t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es sei  $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n \in \mathcal{T}^+$  und

Dazu gibt es  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  mit  $\Lambda(t) (\xi_1, \dots, \xi_{j-1},$

da ja  $\Lambda(0) = E$ ,  $\Lambda(t)$  stetig bzgl.  $t$  und  $\mathcal{T}_{n-1}^+$  offen ist.

Zu  $\Lambda(t)$  wähle nach (b)  $\hat{\xi} \in \mathcal{T}^+$  mit  $\Lambda(t) \hat{\xi} \in \mathcal{T}$

g) Wähle  $0 < \mu \in \mathbb{R}$  so, daß  $\Lambda(t) [-\xi - \mu \hat{\xi} - \sum_{m=1}^n \xi_m] \in \mathcal{T}^+$   
und  $0 < \lambda \in \mathbb{R}$  so, daß  $\Lambda(t) [\lambda \hat{\xi} + \mu \hat{\xi}] \in \mathcal{T}^+$   
Definiere  $\xi_{j-1} := \lambda \hat{\xi}$ ,  $\xi_{j+1} := \mu \hat{\xi}$

e) Damit gilt für alle  $\xi_j \in \{\alpha \xi \mid \alpha \in [0,1]\}$

$$\Lambda(t) (\xi_1, \dots, \xi_{j-2}, \xi_{j-1} + \xi_j + \xi_{j+1}, \xi_{j+2}, \dots, \xi_n - \sum_{m=1}^n \xi_m \xi_j) \in \mathcal{T}_{n-1}^+ \times [\mathcal{T}^+ \cup \{0\}] \text{ w.z.z.w.}$$

Anwendung: Sei  $\vec{f}_s = (f_1, \dots, f_{s-1})$ ,  $\vec{f} = (f_{s+1}, \dots, f_n)$  wie im Satz zu  $\vec{f} \in \mathbb{R}^+$  bestimmt. Dann ist  $\{\vec{f}_s\} \times \{\alpha \in [0,1]\} \times \{\vec{f}\}$  kompakt und im offenen Kern von  $\mathcal{U} \cap \mathcal{G}'_\pi$  (siehe dazu III.3) enthalten. Daher gibt es Umgebung  $U_1$  von  $\vec{f}_s$ ,  $U_2$  von  $\vec{f}$  und  $V$  von  $\{\alpha \in [0,1]\}$ , so daß

$$U_1 \times V \times U_2 \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{G}'_\pi$$

Literaturverzeichnis

- [1] L. Garding, A.S. Wightman  
Fields as operator-valued distributions  
Arkiv för Fysik 28 (1965) 129
- [2] G.C. Wick  
The Evaluation of the Collision Matrix  
Physical Review 80 (1950) 268
- [3] K. Wilson  
On Products of Field Operators at Short Distances  
Cornell Report (1964)  
Non-Lagrangian Models of Current Algebra  
Physical Review 179 (1969) 1499
- [4] K. Wilson, W. Zimmermann  
Operator Product Expansions and Composite Field Operators  
in the General Framework of Quantum Field Theory  
Commun.math.Phys. 24 (1972) 87
- [5] J. Valatin  
On the Propagation Functions of Quantum Electrodynamics  
Proc. Roy. Soc. A 226 (1954) 254
- [6] W. Zimmermann  
Local Field Equation for  $A^4$ -coupling in Renormalized Perturbation Theory  
Commun.math.Phys. 6 (1967) 161  
Direction-Dependent Singularities for  $A^4$ -coupling  
Commun.math.Phys. 10 (1968) 325
- [7] R.A. Brandt  
Derivation of Renormalized Relativistic Theory from Finite Local  
Field Equations  
Annals of Physics 52 (1969) 122
- [8] P. Otterson, W. Zimmermann  
On the Directional Dependence of Composite Field Operators  
Commun.math.Phys. 24 (1972) 107

- [9] P. Otterson  
Direction Dependence of Composite Field Operators and Dilatation-Invariant Wightman Functions  
Il Nuovo Cimento 18A (1973) 683
- [10] G. Dell'Antonio  
On Dilatation Invariance and the Wilson Expansion  
Il Nuovo Cimento 12A (1972) 756
- [11] J.H. Lowenstein  
Normal Products in the Thirring Model  
Commun.math.Phys. 16 (1970) 265
- [12] S. Schlieder, E. Seiler  
Remarks Concerning the Connection between Properties of the 4-Point-Function and the Wilson-Zimmermann Expansion  
Commun.math.Phys. 31 (1973) 137
- [13] R. Jost  
The General Theory of Quantized Fields  
AMS, Providence 1965
- [14] R. Streater, A. Wightman  
PCT, Spin and Statistics, and all that  
Benjamin, New York 1964  
oder  
Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie  
Bibliographisches Institut, Mannheim 1969
- [15] D. Hall, A. Wightman  
A theorem on invariant analytic functions with application to relativistic quantum field theory  
Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 35 (1957) no 5
- [16] H. Behnke, P. Thullen  
Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher  
Springer Verlag, Berlin 1970

- [17] T. Kato  
Perturbation theory for linear operators  
Springer Verlag, Berlin 1966
- [18] P. De Mottoni, H. Genz  
Field Products at Short Distances  
Il Nuovo Cimento 67B (1970) 1  
On Logarithmic Behavior in Short-Distance Field Products  
Nuclear Physics B25 (1971) 173
- [19] A. Jaffe  
Entire Functions of the Free Field  
Annals of Physics 32 (1965) 127
- [20] A. Wightman  
Introduction to some Aspects of the Relativistic Dynamics of  
Quantized Fields  
in Cargèse Lectures in Theoretical Physics 1964  
Gordon and Breach, New York 1967
- [21] J. Kühn, E. Seiler  
Light Cone Expansion and Four Point Function  
Commun.math.Phys. 33 (1973) 253
- [22] A. Kolm, B. Nagel  
A Generalized Edge of the Wedge Theorem  
Commun.math.Phys. 8 (1968) 185
- [23] M. Taylor  
Vector-Valued Analytic Functions  
Michigan Math. J. 19 (1972) 353



### Lebenslauf:

Am 26. August 1945 wurde ich als Sohn des Ingenieurs Anton Baumann und seiner Ehefrau Susanne, geborene Fiebig, in Lauingen geboren.

Von 1951 bis 1957 besuchte ich die Volksschule und daran anschließend bis 1964 das Deutsche Gymnasium in Lauingen. Von Oktober 1964 bis März 1966 leistete ich meinen Wehrdienst ab.

Im Sommersemester 1966 begann ich das Studium der Physik an der Universität München. Im Herbst 1968 machte ich die Vorprüfung. Ab Frühjahr 1970 arbeitete ich im Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik unter Professor Dr. H.P. Dürr an meiner Diplomarbeit über "Stückweise Analytizität von S-Matrixelementen und Kausalität". Die Diplomprüfung legte ich im Juli 1971 ab. Seit November 1971 bin ich Doktorand bei Privatdozent Dr. S. Schlieder.





